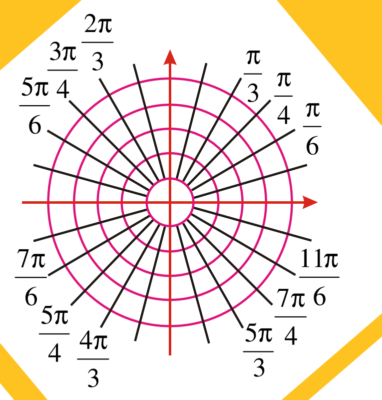
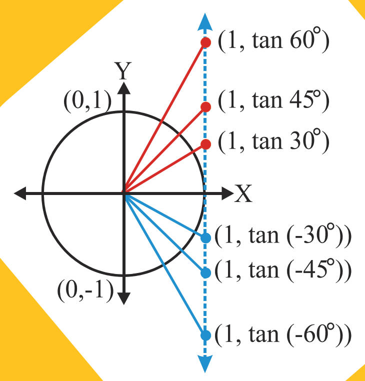
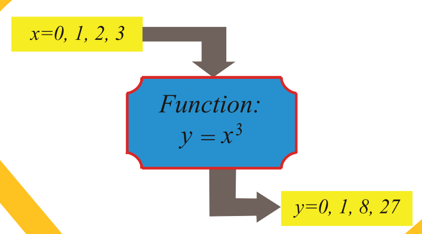
وزارت معارف

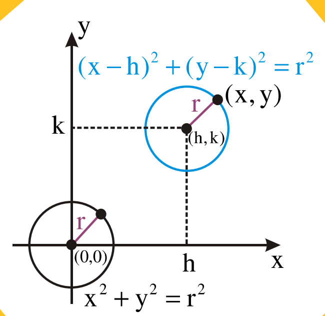
ریاضی

صنف دهم









MATHEMATICS

Grade 10

صنف دهم

۱۳۹۸



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی صنف دهم

۱۳۹۸
هـ . ش.

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضیات

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: دهم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامه وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپخانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

حق طبع، توزیع و فروش کتاب‌های درسی برای وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان محفوظ است. خرید و فروش آن در بازار ممنوع بوده و با متخلفان برخورد قانونی صورت می‌گیرد.

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهه سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادۀ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندۀ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادۀ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

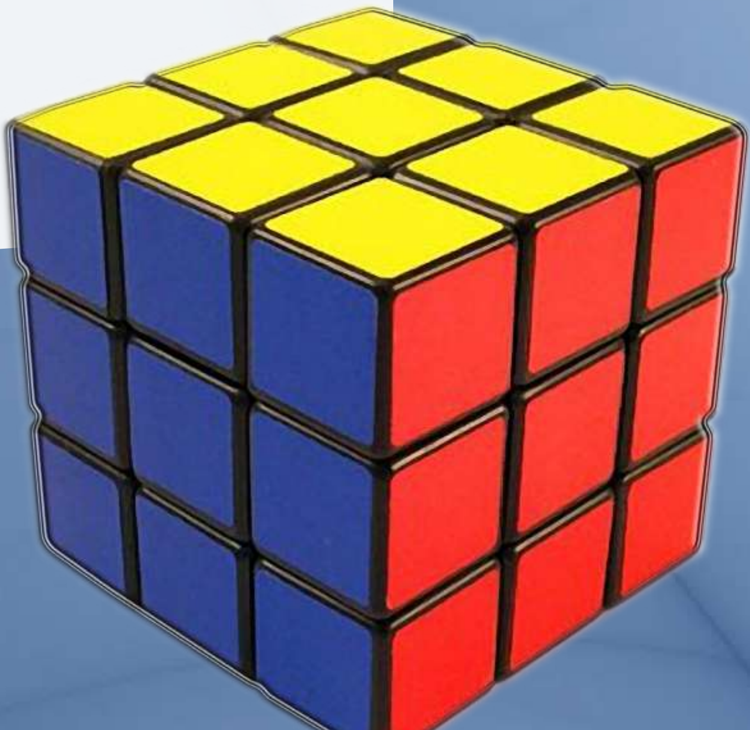
عنوان	فهرست	صفحه

فهرست **صفحه**

فصل اول

پولینوم(Polynome)
یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



افاده‌های الجبری
(Algebraic Expressions)



آیا می‌توانید بگویید کــه از افاده‌های الجبری

$\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ و $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$

کدام‌یک افــادۀ الجبری ناطق و کدام‌یک غیر ناطق می‌باشد؟

متحول و ثابت(variable and constant): متحول، یک سمبول است که به جای هر عنصر یک ست غیر خالی وضع می‌شود؛ یا یک حرفی است که نشان دهندۀ قیمت های متغیر می‌باشد؛ طور مثال: اگر $A=\{x/x\in IN$ و $x\leq 10\}$ باشد.
x می‌تواند در ست A قیمت‌های اعداد طبیعی از یک الی 10 را بگیرد. x را متحول (Variable) می گویند. متحولین به صورت عموم توسط حرف‌های کوچک زبان انگلیسی x, y, z و غیره نشان داده می‌شوند.
قیمت یک عدد تغییر نمی کند؛ طور مثال: عدد 4 هیچ گاه با 5 یا 3 ویا با کدام عدد دیگری مساوی شده نمی‌تواند، پس تمام اعداد حقیقی، ثابت‌ها(Constants) می باشند.
علاوه از اعداد حقیقی، حرف‌های زبان انگلیسی، مثل $a, bc...$ و غیره به عوض ثابت‌ها نیز استعمال می گردند.
افادۀ الجبری(Algebraic Expression): افادۀ الجبری آن است که از یک ثابت یا یک متحول و یا از ترکیب ثابت‌ها و متحول‌ها تشکیل شده باشد.
در مثال‌های زیر افاده‌های الجبری را مشاهده کنید:

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 و غیره.

که در افادۀ الجبری $3x^2$ عدد 3 را ضریب (Coefficient) می‌گویند. در افادۀ $-\frac{1}{2}y$ عدد $-\frac{1}{2}$ و در افادۀ x عدد یک ضریب می‌باشد، $-3x^5y^5$ و $15x^5y^5$ حدود مشابه (Liketerms) می‌باشند که متحولین مشابه، دارای توان‌های مساوی بوده؛ اما ضریب‌های عددی آن‌ها باهم فرق دارند.

اقسام افاده‌های الجبری: افاده‌های الجبری به سه قسم اند:

1. افاده‌های الجبری پولینومی(Polynomial algebraic expressions):

پولینوم: افادهٔ الجبری یک یا چند حده که توان‌های حرف‌های‌شان در ست اعداد مکمل شامل باشند، پولینوم نامیده می‌شود.

x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$ ، $x-1$ ، 12 پولینوم می‌باشند، اما $x^{-2}+x-1$ ، $\frac{1}{x}+x$ و $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینوم‌ها نمی‌باشند.

یا مشخصات پولینوم عبارت اند از:

- توان تمام متحولین اعداد مکمل باشند
- در مخرج متحول نداشته باشد.
- متحول، زیر جذر نباشد.

مثال 1: در افاده‌های الجبری داده شده زیر کدام یک پولینوم و یک کدام یک پولینوم نمی باشد؟

$$a)\sqrt{2}x \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}}$$
$$e)x^{-3}+x^2 \quad , \quad f)8p^2+p^{2.2} \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad , \quad h)88 \quad , \quad i)6a^2-4a$$

حل: a, h و i پولینوم‌ها هستند، اما b, c, d, e, f و g پولینوم‌ها نیستند.

به یاد داشته باشید که هر پولینوم، یک افادهٔ الجبری ناطق می‌باشد؛ اما هر افادهٔ الجبری ناطق، پولینوم نمی‌باشد؛ طور مثال: $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یک افادهٔ الجبری ناطق است، اما پولینوم نیست.

12 نیز یک پولینوم است، زیرا که $12=12x^0$ است صفر نیز در، ست اعداد مکمل شامل می‌باشد، اما $5\sqrt{x}$ و $\frac{5}{x^3}$ پولینوم نیستند؛ زیرا $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$ و $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ که $\frac{1}{2}$ و -3

در ست اعداد مکمل شامل نیستند.

یک پولینوم توسط یک حرف مثل P نشان داده می‌شود؛ شکل عمومی یک پولینوم که از یک حرف (متحول) تشکیل شده باشد طور زیر می‌باشد، که به‌نام شکل معیاری‌یاد می‌شود:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یک عدد مکمل و ضرایب $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ اعداد حقیقی‌اند؛ اگر $a_n \neq 0$ باشد؛ پس n درجهٔ پولینوم می‌باشد.

فعالیت

در افاده‌های الجبری $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$, $2x^3 - x^2$ و $8\sqrt{x}$ کدام یک پولینوم و کدام‌یک‌پولینوم نمی‌باشد؟

مثال2: در پولینوم $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ می‌باشد و در پولینوم $11x^2 - 1$ ، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، و $a_0 = -1$ می‌باشد.

2. افادهٔ الجبری ناطق (Rational algebraic expression): اگر بتوانیم یک افادهٔ الجبری را به شکل $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ بنویسیم طوری که p و q پولینوم‌ها باشند این گونه افادهٔ الجبری را افادهٔ الجبری‌ناطق می گویند؛ طور مثال: افادهٔ $x^2 - \frac{1}{x^2}$ که یک متحول دارد به شکل $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ نیز می‌توانیم بنویسیم که‌یک افادهٔ الجبری ناطق می‌باشد؛ چون مخرج هر افادهٔ الجبری می‌تواند عدد یک باشد؛ پس $(x^2 - 1)$نیز یک افادهٔ الجبری ناطق می‌باشد زیرا که $x^2 - 1 = \frac{x^2 - 1}{1}$ می‌باشد.

3. افادهٔ الجبری غیر ناطق(Irrational algebraic expression): عبارت از افادهٔ الجبری است که آنرا به شکل خارج‌قسمت دو پولینوم نوشته کرده نمی‌توانیم؛ طور مثال: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ و $\sqrt{y^2+1}$ مثال‌های افاده‌های الجبری غیرناطق می‌باشند.

یک افادهٔ الجبری امکان دارد ناطق، غیرناطق و یا پولینوم باشد. پولینوم افادهٔ الجبری یک یا چند حده‌یی است که توان‌های حرف‌ها آن در ست اعداد مکمل شامل باشند.

تمرین

1. در افاده‌های الجبری زیر، کدام‌یک افادهٔ الجبری ناطق، غیر ناطق و یا پولینوم می‌باشد؟

$$\frac{1}{x}\ ,\ \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3x^2}{2}\ ,\ \frac{m+3}{6}\ ,\ x+\frac{1}{x}\ ,\ 3x^2+\frac{xy}{2}$$ و 13

2. در افاده‌های الجبری زیر، کدام‌یک، پولینوم و کدام‌یک پولینوم نمی‌باشد؟

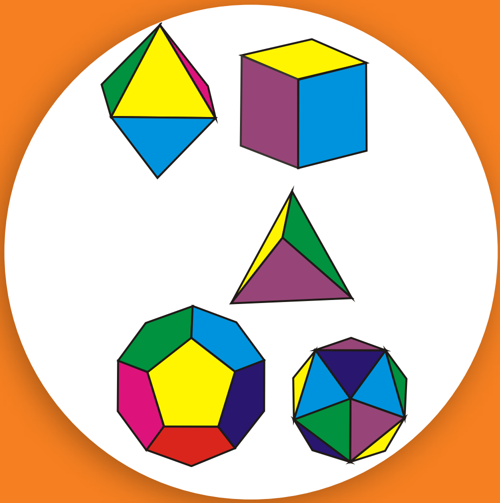
$$3x^2+\frac{xy}{2}\ ,\ -20a^3b+28ab^4\ ,\ \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}\ ,\ 8\sqrt{x}\ ,\ 8x^{-8}\ ,\ 3x\ ,\ -0.03$$

3. در پولینوم $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$، a_1, a_2, a_3, a_n و a_0 را نشان دهید.

4. در پولینوم $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$، a_1, a_2, a_3 و a_0 را نشان دهید.

اقسام پولینوم و درجهٔ آن:



آیا می‌توانید بگویید که درجهٔ پولینوم‌های

$12y^5x^3 + x^4y^3 \square 12x^3 \square + x^2 - x$ و

12 چند می‌باشد؟

مونوم عدد یا یک متحول یا حاصل ضرب یک عدد و یک یا چندین متحول می‌باشد.

$3x$ یا $16x$ مونوم یا (Monomial) یک افادهٔ الجبری یک‌حده است و $x-4$ یا $ab-y$ یک افادهٔ الجبری دو حده (Binome) یا (Binomial) و $2x^3 - x - 1$ افادهٔ الجبری سه حده (Trinomial) می‌باشد و افادهٔ الجبری $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ به نام مولتینوم (Multinomial) یاد می‌شود. مونوم‌ها در یک پولینوم به نام حدود پولینوم یاد می‌شود و هر مونوم یک پولینوم می‌باشد.

بعضی اوقات پولینوم از یک، دو، سه و یا چندین متحول تشکیل شده می‌باشد. پولینوم $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ دارای یک متحول، پولینوم $2x^3 - 3y$ دارای دو متحول و پولینوم $x + y + z$ دارای سه متحول می‌باشد که در جدول زیر نشان داده شده است.

متحول	مونوم (یک حده)	باینوم (دو حده)	ترینوم (سه حده)
یک متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دو متحول	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
سه متحول	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

یادداشت: متوجه باید بود که $\frac{5}{x}, 2\sqrt{xy}$ و y^{-3} هر یک مونوم نمی‌باشد.

فعالیت

در افاده‌های الجبری ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ و $4x^2-4y$ مونوم، باینوم و ترینوم را نشان دهید.

درجهٔ یک پولینوم(Degree of a Polynome): اگر پولینوم از یک حرف تشکیل شده باشد، بزرگترین توان این حرف عبارت از درجهٔ پولینوم می‌باشد؛ طور مثال: درجهٔ پولینوم $x^5+1+2x+x^3-$ عبارت از 5 می‌باشد. اگر پولینوم از چند حرف (متحول) تشکیل شده باشد درجهٔ مونومی که توان بزرگتر دارد عبارت از درجهٔ پولینوم می‌باشد؛ طور مثال: درجهٔ پولینوم $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ عبارت از $(1+5=6)$ می‌باشد و این پولینوم نظر به x درجهٔ سوم و نظر به y درجهٔ پنجم می‌باشد؛ اگر درجهٔ یک پولینوم عدد 1 باشد پولینوم را پولینوم خطی (Liner Polynome) و اگر درجهٔ پولینوم عدد 2 باشد پولینوم را پولینوم درجه دوم (Quadratic Polynome) می‌گویند و اگر درجهٔ پولینوم عدد 3 باشد به نام پولینوم درجه سوم (Cubic Polynomial) و هم مونوم $3x^2$ درجهٔ دوم، و درجهٔ‌مونوم $3x^2y^3$ عبارت از 5 و درجهٔ مونوم 12 صفر می‌باشد. این‌گونه پولینوم را پولینوم ثابت می‌گویند؛ زیرا $12=12x^0$.

پولینوم ثابت: پولینومی است که درجهٔ آن صفر باشد یا به عبارت دیگر، پولینومی است که ضرایب تمام متحولین آن صفر باشد.

مثال1: اگر $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یک پولینوم ثابت باشد قیمت‌های m و n را دریابید.

حل: چون یک پولینوم ثابت می‌باشد؛ پس ضریب هر حد متحول صفر می‌باشد.

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

پولینوم صفری(Zero Polynome): اگر حد ثابت پولینوم ثابت صفرباشد این‌گونه پولینوم به نام پولینوم صفری یاد می‌شود؛ طور مثال: $P(x)=0$ ، درجهٔ پولینوم صفری تعریف نشده است.

مثال2: قیمت a را دریابید اگر $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یک پولینوم صفری باشد.

حل: در پولینوم صفری هر حد صفر می‌باشد؛ پس:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

مثال3: درجه‌های پولینوم‌های $P(x)=x^2-1+3x^5$، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ و $h(x)=\sqrt{3}$ را دریابید.

حل: درجهٔ پولینوم $P(x)$ عبارت از 5 است و درجهٔ پولینوم $g(x)$ نیز 5 $(n=5)$ می‌باشد، اما درجهٔ پولینوم $h(x)$ صفر می‌باشد.

فعالیت

درجهٔ هر پولینوم و درجهٔ این پولینوم‌ها را نظر به هر حرف تعیین کنید.

$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$

پولینوم مکمل و ناقص: پولینوم مکمل پولینومی است که تمام حدود آن از بزرگترین توان متحول تا عدد ثابت موجود باشد.

پولینوم‌های $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ و 51 پولینوم‌های مکمل اند، اما پولینوم‌های x^2-1 و x^3+x+1 پولینوم‌های ناقص می‌باشند. ما می‌توانیم که پولینوم‌های ناقص را به شکل پولینوم‌های مکمل بنویسیم؛ مانند: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ و $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

پولینوم‌های منظم و غیرمنظم: پولینوم‌های $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینوم‌های منظم‌اند؛ اما پولینوم $3x^4-x+1+x^3+x^2$ یک پولینوم غیرمنظم می‌باشد که می‌توانیم یک پولینوم غیرمنظم را به شکل پولینوم منظم بنویسیم؛ طور مثال این پولینوم را می توانیم به دو طریق به شکل منظم بنویسیم:

$3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

پولینوم‌های نزولی و صعودی
:(Descending and ascending Polynomes)

اگر یک پولینوم از بزرگترین توان یک متحول به طرف کوچکترین توان ترتیب شده باشد نزولی و اگر از کوچکترین به بزرگترین توان ترتیب شده باشد ترتیب صعودی می گویند.

طور مثال: پولینوم $x^4+3x^3+x^2+x+1$ به شکل نزولی و پولینوم $1+x+x^2+3x^3+x^4$ به شکل صعودی ترتیب شده است.

اگر یک پولینوم از دو یا چند حرف تشکیل شده باشد ما می توانیم که پولینوم را نظر به هر حرف به شکل صعودی یا نزولی ترتیب نماییم، طوری که پولینوم $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ نظر به x به طور نزولی و نظر به y به طور صعودی ترتیب شده است.

فعالیت

پولینوم‌های زیر را به شکل صعودی ترتیب کنید.

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

مثال4: پولینوم $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ را نظر به y به شکل صعودی بنویسید.

حل

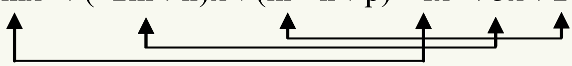
$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

پولینوم‌های معادل: پولینوم‌هایی اند که دارای یک متحول بوده و ضرایب حدود مشابه آن‌ها باهم مساوی باشند.

مثال5: اگر پولینوم x^2+3x+2 با پولینوم $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ معادل باشد، قیمت‌های n,m و p را دریابید.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$
$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



در نتیجه:

$$m=1$$
$$-2m+n=3 \qquad \Rightarrow n=5$$
$$m-n+p=2 \qquad \Rightarrow p=6$$

پولینوم‌های متجانس(Hemogence Polynoms): اگر درجه‌های تمام حدودیک پولینوم باهم مساوی باشند پولینوم را متجانس می گویند؛ طورمثال: $2x^2+y^2-z^2$ یک پولینوم متجانس می‌باشند.

مثال6: اگر پولینوم $3x^2y+5x^mz-7y^{n-3}z^2$ متجانس باشد قیمت‌های m و n را دریابید.

حل

$$m+1=2+1 \qquad n-3+2=m+1$$
$$m=2 \qquad n-1=m+1$$
$$n-1=2+1$$
$$n=4$$

پولینوم‌هایی که از یک حرف (متحول) تشکیل شده باشند بزرگترین توان این حرف درجهٔ پولینوم می‌باشد و اگر پولینوم از چند حرف تشکیل شده باشد درجهٔ مونومی که بزرگترین توان را دارا می‌باشد عبارت از درجهٔ پولینوم می‌باشد و پولینوم‌هایی که دارای یک متحول بوده و ضرایب حدود مشابه آن‌ها باهم مساوی باشند به نام پولینوم‌های معادل یاد می‌شوند و اگر درجه‌های تمام حدود یک پولینوم باهم مساوی باشند به نام پولینوم متجانس یاد می‌شود.

تمرین

1. در افاده‌های زیر مونوم، باینوم و ترینوم را نشان دهید و نیز درجه‌های آن‌ها را دریابید.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2. در پولینوم‌های زیر پولینوم‌های مکمل و ناقص را نشان دهید و پولینوم‌های ناقص را به شکل پولینوم‌های مکمل بنویسید.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3. اول درجهٔ هر پولینوم را که در زیر داده شده است دریابید و بعد به شکل نزولی ترتیب نمایید.

$4x-5+6x^2+8x^3$

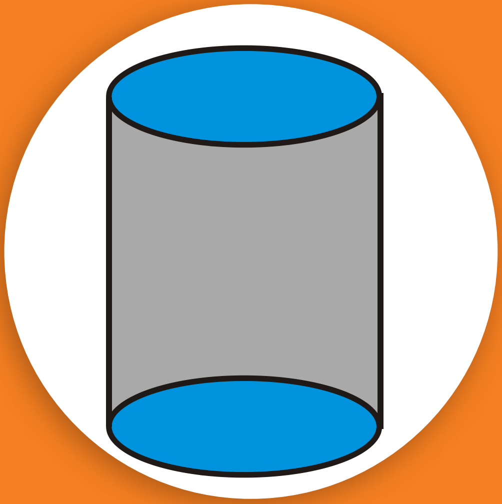
$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4. اگر $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ باشد قیمت‌های n,p و c را دریابید.

5. قیمت‌های b,a و c را دریابید؛ اگر: $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ و $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ پولینوم‌های معادل باشند.

6. اگر $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یک پولینوم متجانس باشد، قیمت‌های m و p را معلوم کنید.



دریافت قیمت و مجموع ضرایب یک پولینوم

آیا می‌توانید بگویید که برای $x=-1$ قیمت پولینوم $P(x)=x^3-x^2-x-1$ یعنی $P(-1)=?$ چند می‌شود؟

اگر در یک پولینوم به عوض متحول یک عدد حقیقی (قیمت خاص متحول) وضع کنیم یک عدد حقیقی به‌دست می‌آید که همین عدد حقیقی قیمت این پولینوم می‌باشد. برای $x=2$ قیمت پولینوم $P(x)=3x+2$ عبارت از $P(2)=3\cdot 2+2=8$ می‌باشد.

مثال 1: در پولینوم $P(x)=2x^2-7x+1$ قیمت‌های $P(5)$، $P(-1)$ و $P(0)$ را دریابید.

حل

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

$P(0)$، $P(-1)$ و $P(1)$ پولینوم $P(x)=x^5-x^3-x-1$ را دریابید.

مثال 2: اگر $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ باشد $P(-\frac{1}{4})$ را دریابید.

حل

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

مثال3: طوری که می‌دانید محیط (Circumference) دایره از فورمول $C = 2\pi r$

به‌دست می‌آید، اگر $\pi = \frac{22}{7}$ و r شعاع دایره باشد.

در صورتی که شعاع دایره $r = 3\frac{1}{2}cm$ باشد، محیط این دایره (C) را دریابید.

حل

$$C = 2\pi r = 2.\frac{22}{7}.\frac{7}{2}cm = 22cm$$

مثال4: اگر b, a و c طول اضلاع مثلث و p نصف محیط مثلث باشد، یعنی

$p = \frac{a+b+c}{2}$ مساحت مثلث از فورمول $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به دست می آید.

اگر طول اضلاع مثلث $a = 9cm$, $b = 12cm$ و $c = 15cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18\cdot 9\cdot 6\cdot 3} = \sqrt{2\cdot 9\cdot 9\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 9^2} = 2\cdot 3\cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

حجم استوانه از فورمول $V = \pi r^2 h$ به دست می‌آید که V حجم استوانه، r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه می‌باشد. اگر $r = 5cm$ و $h = 21cm$ باشد حجم این استوانه را دریابید.

مجموع ضرایب یک پولینوم: اگر $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ باشد مجموع ضرایب پولینوم $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ می‌باشد.

مثال5: مجموع ضرایب پولینوم $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ را دریابید.

حل: $p(1)$ را در می‌یابیم: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

اگر یک پولینوم از چند حرف تشکیل شده باشد به عوض هر حرف عدد(1) را وضع می‌کنیم؛ طور مثال: برای دریافت مجموع ضرایب $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ به عوض x و y عدد یک را وضع می‌کنیم.

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

مثال6: مجموع ضرایب $(x-3y)^4$ را دریابید.

حل

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

مثال7: مجموع ضرایب $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ را به دست آورید.

حل

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

مثال8: اگر شعاع این توپ 6cm باشد حجم این توپ را دریابید.



حل

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

اگر در یک پولینوم P(x) عوض x قیمت داده شده را وضع کنیم، قیمت پولینوم به دست می‌آید.

اگر در یک پولینوم عوض حرف (متحول) عدد (یک) وضع شود مجموع ضرایب پولینوم به دست می‌آید.

تمرین

1. اگر پولینوم $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$ و $p(\frac{1}{2})$ را دریابید.

2. اگر در پولینوم $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ قیمت $p(2)=17$ باشد، قیمت k را دریابید.

3. اگر مجموع ضرایب عبارت از mx^2-2x+1 18 باشد، قیمت m را دریابید.

4. قیمت پولینوم $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ را برای $x=-\frac{1}{2}$ دریابید.

5. در پولینوم‌های $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ و $D=x^2+4x-4$ برای $x=4$ قیمت کدام پولینوم از عدد 100 زیاد می‌باشد؟

a) C b) D c) A d) B

6. در پولینوم‌های زیر برای $x=5$ کدام پولینوم بزرگترین قیمت را دارا می‌باشد؟

a) x^2-2x+6
b) $3x^4+6x+12$
c) $-x^3-40x-300$
d) x^5-120x^4+10

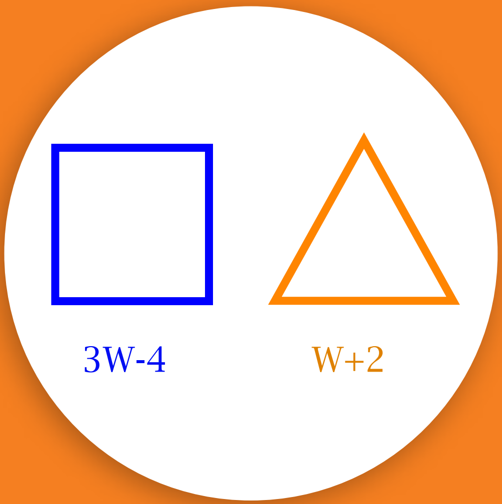
7. اگر $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$، $p(0)$، $p(\frac{1}{2})$ و $p(-\frac{1}{2})$ را دریابید.

8. برای $x=2$ قیمت پولینوم $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ را دریابید.

عملیه‌های چهارگانهٔ پولینوم‌ها

• اگر هر ضلع مربع $3w-4$ و هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع $w+2$ باشد یک افادهٔ الجبری را بنویسید که محیط هر دو شکل را نشان دهد.

• اگر $A=8x^2-2x+3$ و $B=9x-5$ باشد $A+B$ و $A-B$ را دریابید.



1- عملیهٔ جمع: حدود مشابه (Like terms) باهم جمع و نیز حدود مشابه یکی از دیگری تفریق می‌شود که این هر دو عملیه به صورت افقی و عمودی انجام شده می‌تواند.

مثال 1: اگر $A=-3cd^2-2cd+5$ و $B=9cd-7cd^2-5$ باشد $A+B$ را دریابید.

حل

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

اگر $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ و $C=2a+4$ باشد مجموع این سه پولینوم را دریابید. $(A+B+C=?)$

مثال 2: $A+B+C$ را دریابید اگر:

$A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ و $C=x^2-5x+4$ و نیز اگر

$A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ و

$C=a^4b+a^3b^2-2c$ باشد.

حل: در اول پولینوم‌ها را به شکل منظم می‌نویسیم و بعد حدود مشابه را باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a^4b-2a^3b^2 & -3a^2b^3 & -4c & -2b \\ \quad a^3b^2 & -2a^2b^3 & & +4b-4 \\ a^4b+a^3b^2 & & -2c & \\ \hline 2a^4b & -5a^2b^3 & -6c & +2b-4 \end{array}$$

2- عملیۀ تفریق: در عملیۀ تفریق معکوس جمعی مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم یا به عبارت دیگر، علامه‌های مفروق را تغییر می‌دهیم و با مفروق منه جمع می کنیم.

مثال 1: پولینوم B را از پولینوم A تفریق نمایید اگر $A=-x^3+x^2+x-7$ و $B=-x^3+x^2+4x+3$ باشد و نیز اگر $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ و $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ باشد.

حل

$$\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2 \mp 3c^2 \mp 3d^2 \mp 3e^2 \mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3 \pm x^2 \pm 4x \pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید به یاد داشته باشیم که غرض ساده ساختن یک پولینوم حدود مشابه (Like terms) را باهم جمع و یا از یکدیگر تفریق می کنیم.

به طور مثال:

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

فعالیت

در پولینوم‌های زیر حدود مشابه(Like terms) را نشان دهید.

$9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$ $\qquad$ $-t+5t^2-6t^2+6t-3$

$2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$ $\qquad$ $3p-4p^2+6p+10p^2$

مثال2: با پولینوم $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ کدام پولینوم را جمع کنیم تا حاصل جمع $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شود؟

حل

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

مجموع پولینوم‌های $4x+6-2x^2$ و $3x^2-x^3-3$ را از مجموع پولینوم‌های x^3+x^2-2x و $-2x^3+3x-7$ تفریق کنید.

مثال3: تفریق کنید.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ 0 \end{array}$$

مثال4: حدود مشابه (Like terms) را باهم جمع و ساده کنید.

$8-10+x-7+x=2x-9$ $\qquad$ $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ $\qquad$ $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید به یاد داشته باشیم که اگر P, Q و R پولینوم‌ها باشند؛ پس:

(خاصیت تبدیلی عملیهٔ جمع)...................... $P+Q=Q+P$

(خاصیت اتحادی عملیهٔ جمع)...... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(خاصیت توزیعی ضرب، بالای جمع)............ $P(Q+R)=PQ+PR$

یا: $(Q+R)P=QP+RP$

در عملیه‌های جمع و تفریق پولینوم‌ها حدود مشابه باهم جمع و یا از یکدیگر تفریق می‌شوند. در عملیهٔ جمع پولینوم‌ها خاصیت‌های تبدیلی و اتحادی صدق می‌کند و در عملیهٔ تفریق معکوس جمعی مفروق با مفروق‌منه جمع می‌شود و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع پولینوم‌ها نیز صدق می‌کند.

تمرین

1. مجموعهٔ دو پولینوم x^2+2x-y^2 است اگر یک پولینوم $x^2-2xy+3$ باشد، پولینوم دیگری را دریابید.
2. پولینوم $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ را از پولینوم $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ تفریق کنید.
3. از پولینوم $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را تفریق کنید.
4. اگر $A=a^3+2a^2-6a+7$, $B=a^3+2a+5$ و $C=2a^3-a^2+2a-8$ باشد مجموعهٔ این سه پولینوم را دریابید. ($A+B+C=?$)
5. حاصل جمع افادهٔ $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ مساوی است به:

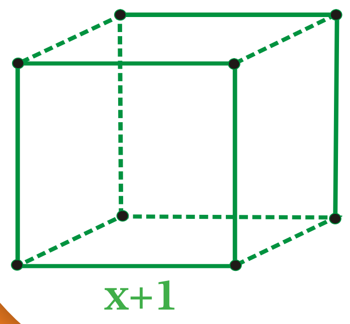
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع کنید:

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. اگر دو طیاره از یک میدان هوایی در جهت مقابل همدیگر پرواز کنند، در صورتی که 2 ساعت بعد فاصلهٔ یک طیاره از میدان هوایی $x^2+2x+400$ میل و فاصلهٔ طیارهٔ دیگر از همین میدان هوایی $3x^2-50x+100$ میل باشد فاصله بین این دو طیاره را دریابید.

ضرب پولینوم‌ها



حجم مکعبی را دریابید که هر ضلع آن $(x+1)$ سانتی متر باشد.

ضرب مونوم در مونوم: اگر مونوم $3r^2s^3$ را در مونوم $5r^4s^5$ ضرب کنیم حاصل‌ضرب آن $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ می‌شود.

فعالیت

حاصل ضرب $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$, $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ و $(-30a^2b)(-5ab)$ را دریابید.

مثال 1: حاصل ضرب‌مونوم‌های زیر را به دست آورید:

$$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$$
$$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$$
$$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$$
$$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$$
$$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$$
$$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$$
$$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$$
$$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$$
$$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$$
$$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$$
$$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$$
$$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$$
$$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$$

ضرب مونوم در پولینوم

مثال 2: حاصل ضرب زیر را دریابید.

$$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$$
$$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$$
$$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$$
$$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$$

فعالیت

حجم مکعبی را دریابید که طول آن $2x$، عرض آن x و ارتفاع آن $x+2$ باشد.

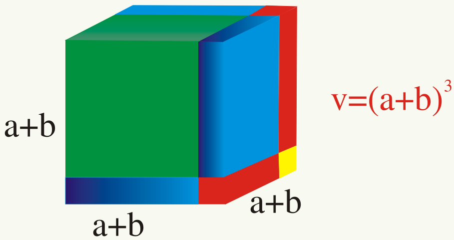
ضرب پولینوم در پولینوم

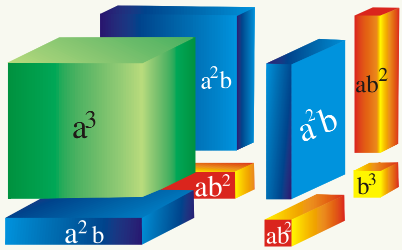
مثال3: (a)حاصل ضرب $(x-4)(x-5)$ را دریابید.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: اگر $P(x)=x^3+2x$ و $Q(x)=2x^2-x+1$ باشد، $P(x)\cdot Q(x)$ را دریابید.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3\cdot(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x\cdot(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

مثال4: افاده‌های زیر را به کمک مطابقت‌های a^3+b^3 و a^3-b^3 باهم ضرب کنید.

حل

$$a)\quad (x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$$
$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

$$b)\quad (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$$
$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$
$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$
$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

به یاد داشته باشید اگر P,Q و R پولینوم‌ها باشند:

(خاصیت تبدیلی ضرب) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(خاصیت اتحادی ضرب) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

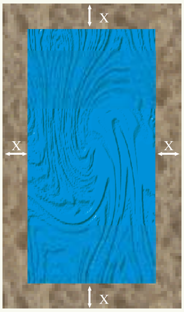
اگر $P(x)=2x^2-x-1$ و $Q(x)=4x-8$ باشد خاصیت‌های تبدیلی و اتحادی ضرب را در آن‌ها بررسی کنید.

در جدول زیر مساحت(Area) اشکال هندسی را دریابید:

اشکال هندسی	طول داده شده	مساحت
مستطیل	طول آن $n+5$ و عرض آن $n-4$	n^2+n-20
مستطیل	طول آن $3y+3$ و عرض آن $2y-1$	$6y^2+3y-3$
مثلث	قاعدهٔ آن $2b-5$ و ارتفاع آن b^2+2	$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$
مربع	هر ضلع آن $m+13$ می‌باشد	$m^2+26m+169$
مربع	هر ضلع آن $2g-4$ می‌باشد	$4g^2-16g+16$
دایره	شعاع آن $3c+2$ می‌باشد	$(9c^2+12c+4)\pi$

فعالیت

حاصل‌ضرب $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ را دریابید.



سؤال: چهار سمت یک حوض مستطیل شکل، راه سمنت شدهٔ حوض می‌باشد که عرض راه x متر و طول و عرض حوض به ترتیب 50m و 25m می‌باشد مساحت راه را دریابید.

حل: مساحت مجموعی راه و حوض

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

مساحت حوض: $(25m)(50m)=1250m^2$

پس مساحت راه: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ می‌باشد.

در ضرب پولینوم‌ها می‌توان مونوم را در مونوم، مونوم را در پولینوم و یا پولینوم را در پولینوم با هم ضرب کرد و در عملیهٔ ضرب خاصیت‌های تبدیلی، اتحادی و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع نیز صدق می‌کند.

تمرین

1. ضرب کنید: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. ارتفاع یک بکس x انچ، طول آن $(x+1)$ انچ و عرض آن $2x-4$ می‌باشد، اگر ارتفاع بکس 3 انچ باشد حجم این بکس مساوی است به:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. حاصل‌ضرب $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) صفر d) هر سه درست نیستند



تقسیم پولینوم بر مونوم

آیا حاصل تقسیم

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n} \quad , \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} \quad , \quad \frac{3mn^2}{-mn} \quad , \quad \frac{-x^2}{x}$$

و $\frac{-n^a}{n^b}$ و $\frac{14x^5}{2x^2}$ را به دست آورده

می‌توانید؛ (اگر تمام مخرج‌ها خلاف صفر باشند)؟

تقسیم مونوم بر مونوم(Dividing monomial by monomial):

مثال1: تقسیم کنید.

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \quad , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \quad , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \quad , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

تقسیم پولینوم بر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

مثال2: تقسیم کنید:

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

حاصل تقسیم را به دست آورید(مخرج‌ها خلاف صفر اند)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2-1} \div \frac{x^2}{y-1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

تقسیم پولینوم بر پولینوم: وقتی‌که یک پولینوم را بالای پولینوم دیگر تقسیم می‌نماییم مقسوم(Dividend) و مقسوم علیه (Divisor) هر دو باید به طور منظم ترتیب شوند.

مثال3: حاصل تقسیم $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ را به دست آورید.

$$\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\
\quad 7x^3-10x^2+13x & \\
\quad \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
\qquad 4x^2-8x+12 & \\
\qquad \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

فعالیت

حاصل تقسیم $(a^5+b^5)\div(a+b)$ را به دست آورید.

مثال4: حاصل تقسیم $(x^3-19x-30)\div(x+3)$ را دریابید.

حل

$$\begin{array}{l|l}
x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\
\underline{_x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\
\quad -3x^2-19x & \\
\quad \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
\qquad -10x-30 & \\
\qquad \underline{\mp 10x \mp 30} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

مثال5: با پولینوم $4x^3-10x^2+12x+6$ کدام عدد جمع شود تا بر $(2x+1)$ پوره تقسیم شود؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{-4x^3 \pm 2x^2} & \overline{2x^2-6x+9} \\ \quad -12x^2+12x & \\ \quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ \qquad\quad 18x+6 & \\ \qquad\quad \underline{-18x \pm 9} & \\ \qquad\qquad -3 & \end{array}$$

در نتیجه، اگر با پولینوم فوق عدد 3 جمع شود به $(2x+1)$ پوره تقسیم می‌شود، متوجه باید بود که عملیهٔ تقسیم را تا وقتی ادامه می‌دهیم که باقی‌مانده صفر و یا درجهٔ باقی‌مانده از درجهٔ مقسوم‌علیه به اندازهٔ یک کم باشد.

فعالیت

حاصل‌ضرب دو پولینوم $6y^3-11y^2+6y-1$ می‌باشد. اگر یک پولینوم $3y^2-4y+1$ باشد پولینوم دیگری را دریابید.

مثال 6: به کدام قیمت x پولینوم $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ بر $3x^2-1$ پوره تقسیم می‌شود.

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & \overline{4x^2+x-3} \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\qquad 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

پس برای $x=-1$ پولینوم فوق بر $3x^2-1$ پوره تقسیم می‌شود.

در تقسیم پولینوم می‌توانیم مونوم را بر مونوم، پولینوم را بر مونوم و یا پولینوم را بر پولینوم تقسیم کنیم، طوری که مقسوم و مقسوم‌علیه به طور نزولی ترتیب گردد و عملیهٔ تقسیم تا وقتی ادامه داده می‌شود که درجهٔ باقیمانده به اندازهٔ یک از درجهٔ مقسوم‌علیه کم باشد.

تمرین

1. به کدام قیمت P پولینوم $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ بر $x - 13$ پوره تقسیم می‌شود؟

2. خارج‌قسمت‌ها را دریابید.

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$$

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$$

$$(x^5 - y^5) \div (x - y)$$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

$$(x^3 - a^3) \div (x^2 - ax + a^2)$$

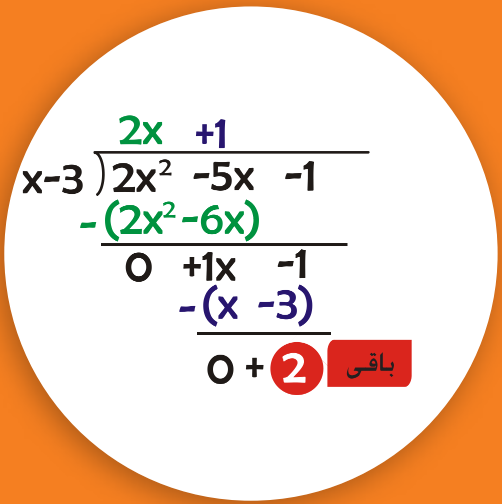
$$(9x^4 + 2x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2)$$

$$(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$$

$$(7x - 12 + 2x^4 - 8x^3 - x^2) \div (2x^2 + 5)$$

قضیهٔ باقی‌مانده
(Remainder Theorem)

آیا بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم می‌توانید بگویید که اگر پولینوم x^3-6x^2-x-6 بر $x-4$ تقسیم گردد باقی‌مانده چند خواهد بود؟



اگر پولینوم $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شود باقی‌مانده مساوی با $P(a)$ می‌شود یا $R=P(a)$

مثال 1: اگر پولینوم $P(x)=2x^2+3x+4$ بالای $(x+3)$ تقسیم شود باقی‌مانده (Remainder) با $P(-3)$ مساوی است.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

حال امتحان می کنیم وعلمیهٔ تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline \underline{-}\,2x^2 \pm 6x & 2x-3 \\ \hline -3x+4 & \\ \mp 3x \mp 9 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

قضیه: اگر پولینوم $P(x)$ را بالای $(x-a)$ تقسیم کنیم باقی‌مانده $R=P(a)$ می‌باشد.

ثبوت: اگر خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $(x-a)$ ، $Q(x)$ و باقی‌مانده R باشد داریم که:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

مثال2: اگر پولینوم $2x^3-x^2-7$ بالای $(x-2)$ تقسیم شود باقی‌مانده چند خواهد بود؟

حل

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

توسط قضیهٔ فوق باقی‌مانده را معلوم کنید.

- اگر $x^3-x^2-226x+1410$ بالای $(x+17)$ تقسیم شود.
- اگر x^3-2x^2+3x+5 بالای $(x-4)$ تقسیم شود.
- اگر $x^3+18x^2+164x+199$ بالای $(x+8)$ تقسیم شود.

مثال 3: اگر پولینوم $5x^2+x-9$ بالای $(x+\frac{1}{2})$ تقسیم شود. بدون انجام عملیهٔ تقسیم بگویید که باقی‌مانده چند خواهد بود؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

مثال **4**: اگر پولینوم $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ را بالای $(2y+1)$ تقسیم کنیم‌بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم باقی‌مانده را دریابید.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

فعالیت

باقی‌ماندهٔ سؤال مثال 4 را توسط انجام‌دادن عملیهٔ تقسیم دریابید.

مثال 5: اگر پولینوم $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ بر $(x+4)$ تقسیم گردد باقی‌مانده را دریابید.

حل

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

حال عملیهٔ تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline -4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \quad -4x^3-13x^2 & \\ \quad \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \qquad 3x^2-33x & \\ \qquad \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \qquad\quad -45x+18 & \\ \qquad\quad \mp 45x \mp 180 & \\ \qquad\qquad 198 & \end{array}$$

اگر پولینوم $P(x)$ را بالای $(x-a)$ تقسیم کنیم بدون انجام عملیهٔ تقسیم توسط قضیهٔ باقی‌مانده (Remainder Theorem) باقی‌ماندهٔ عملیهٔ تقسیم را دریافت کرده می‌توانیم که باقی‌مانده (R) با $P(a)$ مساوی می‌باشد.

تمرین

1. به کمک قضیهٔ(Remainder theorem) باقی‌مانده را دریابید.

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$ $\quad$ $(5x^3-x^2+4x+1)\div(x-3)$

$(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$ $\quad$ $(6x^2+15)\div(4x+9)$

2. اگر پولینوم $5x^3-k^2x^2+3kx-6$ بر $(x+2)$ تقسیم شود به کمک قضیهٔ باقی‌مانده بگویید که به کدام قیمت k باقی‌مانده -44 خواهد شد؟

3. اگر پولینوم $2k^2y^4-ky^2+1$ بالای $(y-\frac{1}{2})$ تقسیم شود به کدام قیمت k عدد 2 باقی می‌ماند؟

4. اگر پولینوم $m^2x^4-10x^2+2$ بالای $(x-1)$ تقسیم شود به کدام قیمت m باقی‌ماندهٔ آن 17 می‌شود؟

قضیهٔ فکتور
(The Factor Theorem)

آیا $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ است؟

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$

$=-1+1=0$

اگر در پولینوم $P(x)$، $P(a)=0$ شود؛ پس $x-a$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

ثبوت: به اساس قضیهٔ باقیمانده $R=P(a)$ است، اگر پولینوم $P(x)$ بالای $(x-a)$ تقسیم شود و خارج‌قسمت آن $Q(x)$ باشد داریم که: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$ اگر $R=0$ باشد؛ پس: $P(x)=Q(x)(x-a)$

مشاهده می‌شود که $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ می‌باشد و یا اگر $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد؛ پس $P(a)=0$ است.

مثال 1: به اساس قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ می‌باشد.

حل

$x-2=0$

$x=2$

$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot 2-28=8+3(4)+8-28=0$

چون R یا $P(2)=0$ است؛ پس $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ می‌باشد.

فعالیت

بدون اجرای عملیهٔ تقسیم به کمک قضیهٔ فکتور نشان دهید که $x-1$ یک فکتور $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ می‌باشد.

مثال 2: به کمک قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^5-32$ می‌باشد.

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

چون $R = P(2) = 0$ است؛ پس $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $x^5 - 32$ می‌باشد.

مثال3: آیا $(x+1)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ می‌باشد؟

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

چون R یا $P(-1)$ مساوی به صفر است؛ پس $(x-1)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

مثال4: به کدام قیمت k ، $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ می‌باشد؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0 \Rightarrow -2k = 2 \Rightarrow k = -1$$

چون برای $k = -1$ باقیمانده صفر می‌شود، در نتیجه $x-1$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

فعالیت

توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که آیا دو حده‌های (باینوم‌ها) طرف چپ، فکتورهای پولینوم‌های مربوط می‌باشد و یا خیر؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$ — $(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$ — $(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$ — $(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

معکوس قضیهٔ فکتور (Converse of Factor Theorem)

اگر $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد؛ پس: $P(a) = 0$ است و عدد a یک جذر (Root) معادلهٔ پولینومی $P(x) = 0$ می‌باشد.

مثال1: اگر $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ باشد، نشان دهید که $P(2)=0$ است و عدد 2 یک جذر معادله $x^3-6x^2+11x-6=0$ می‌باشد.

حل: اگر عدد 2 یک جذر معادلهٔ $x^3-6x^2+11x-6=0$ باشد؛ پس: $(x-2)$ یک فکتور این پولینوم است و $P(2)=0$ می‌باشد.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

مثال2: اگرعدد 2- یک جذر معادلهٔ $x^3+4x^2+kx+8=0$ باشد قیمت k را دریابید.

حل

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

مثال3: نشان دهید که عدد 3 یک جذر معادلهٔ پولینومی $x^3-6x^2+5x+12=0$ می‌باشد.

حل

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

مشاهده می‌شود که عدد 3 یک جذر این معادلهٔ پولینومی می‌باشد.

فعالیت

نشان دهید که عدد 2 یک جذر معادلهٔ $x^3-4x^2+5x-2=0$ می‌باشد.

مثال 4: به کدام قیمت k عدد 3 یک جذر معادلهٔ $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ می‌باشد؟

حل

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

اگر $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ باشد، پس $P(a)=0$ است، و اگر در پولینوم $P(x)$، $P(a)=0$ شود، $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ می‌باشد.

تمرین

1 – به کدام قیمت k , $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ می‌باشد؟

2 – آیا $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ می‌باشد؟

3 – توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x+7)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ می‌باشد.

4 – بدون انجام عملیهٔ تقسیم نشان دهید که آیا $(y-7)$ یک فکتور پولینوم $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ می‌باشد؟

5 – نشان دهید که آیا $(m+\frac{1}{2})$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2m^2+4m-2$ می‌باشد؟

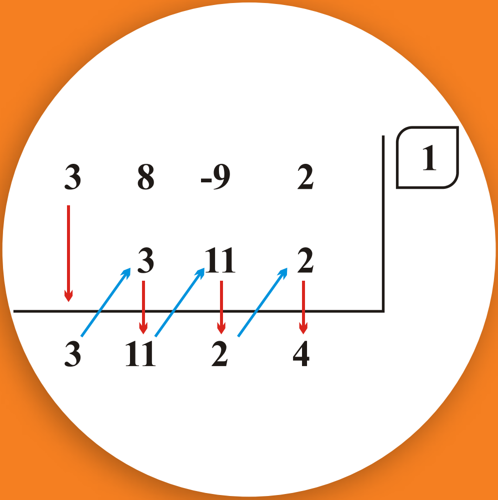
6- به کمک قضیهٔ فکتور پولینوم $x^3+x^2-10x+8$ را تجزیه کنید.

7- اگر $(x-1)$ و $(x+1)$ فکتورهای پولینوم $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ باشند، قیمت‌های a و b را دریابید.

8 – به کدام قیمت k، $(x-5)$ یک فکتور پولینوم $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ می‌باشد؟

9 – به کدام قیمت k عدد (-1) یک جذر معادلهٔ پولینومی $x^3-9x^2+14x+k=0$ می‌باشد؟

تقسیم ترکیبی
(Synthetic Division)



آیا بدون انجام عملیهٔ تقسیم، خارج قسمت و باقی‌مانده را می‌توان دریافت کرد؟
اگر پولینوم $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ بالای $(x-2)$ تقسیم شود.

برای تقسیم پولینوم $P(x)$ بالای $(x-a)$، تقسیم ترکیبی (Horner's Method) یک طریقه کوتاه می‌باشد که به طور عموم برای این اهداف از آن کار گرفته می‌شود.

1 – یافتن قیمت پولینوم برای قیمت‌های مختلف x.
2 – برای یافتن جذر ناطق معادلهٔ $P(x)=0$.
3 – برای تجزیهٔ افاده‌های الجبری.

مثال 1: اگر پولینوم $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ را بالای $(x+4)$ تقسیم نماییم، بدون انجام عملیهٔ تقسیم توسط تقسیم ترکیبی خارج‌قسمت (Quotient) و باقی‌مانده (Remainder) را دریابید.

حل

$x+4=0$

$x=-4$

-4	18	-33	-13	12	4	سطر اول
	180	-12	16	-16		سطر دوم
	198	-45	3	-4	4	سطر سوم

خارج‌قسمت $4x^3-4x^2+3x-45$ و باقی مانده 198 می‌باشد به این مفهوم که:

$$P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$$

عملیهٔ فوق را در قدم‌های زیر نشان داده می‌توانیم: اعداد سطر اول ضریب‌های مقسوم می‌باشند که نظر به توان x به طور نزولی ترتیب شده‌اند.

1. عدد 4 از سطر اول به سطر سوم پایین شده است.

2. عدد 4 در (4–) ضرب شده که (16–) می‌شود و(16–) در سطر دوم زیر عدد 12 نوشته شده است.
3. حاصل‌جمع اعداد 12 و (16–) را که (4–) می‌شود در سطر سوم می‌نویسیم.
4. عدد (4–) را در (4–) ضرب که 16 می‌شود و در سطر دوم زیر عدد 13- نوشته‌شده است.
5. حاصل‌جمع اعداد 16 و (13–) که 3 می‌شود در سطر سوم نوشته شده است.
6. حاصل‌ضرب 3 و (4–) که (12–) می‌شود در سطر دوم زیر عدد 33- نوشته شده است.
7. حاصل‌جمع(33–) و (12–) را که 45– می‌شود در سطر سوم نوشته شده است.
8. حاصل‌ضرب(45–) و (4–) که 180 می‌شود در سطر دوم زیر عدد 18 نوشته شده است.
9. حاصل‌جمع 180 و 18 که 198 می‌شود در سطر سوم قرار گرفته که، 198 باقی‌مانده و $4x^3-4x^2+3x-45$ خارج قسمت می‌باشد.

$$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45 \text{ و } R=198$$

$$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$$

باقی‌مانده + (خارج قسمت) x (مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

توسط انجام عملیهٔ تقسیم خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ سؤال فوق را دریابید.

مثال2: توسط تقسیم ترکیبی و انجام عملیهٔ تقسیم خارج‌قسمت و باقی‌مانده عملیه تقسیم $(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ را دریابید.

به یاد داشته باشید عوض ضریب‌های حدودی‌که وجود ندارد صفر می‌نویسیم یا به عبارت دیگر، پولینوم را به شکل پولینوم مکمل به طور نزولی ترتیب می‌نماییم.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

حالا عملیهٔ تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \underline{-4x^4 \mp 8x^3} & \overline{4x^3+8x^2+11x+24} \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad \underline{-8x^3 \mp 16x^2} & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad \underline{-11x^2 \mp 22x} & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad \underline{-24x \mp 48} & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

خارج قسمت $4x^3+8x^2+11x+24$

و باقی‌مانده 45 می‌باشد.

مثال3: توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقی‌مانده

$(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ را دریابید.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

خارج قسمت $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ و باقی‌مانده (-1) می‌باشد.

مثال 4: توسط تقسیم ترکیبی خارج‌قسمت و باقی‌مانده را دریابید.

$(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$

حل

$\frac{2t-3}{2} = t-\frac{3}{2}$

$t-\frac{3}{2}=0$

$t=\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

$2t^2-4t-8$ خارج قسمت نیست؛ بلکه خارج‌قسمت (t^2-2t-4) می‌باشد.

مثال 5: توسط تقسیم ترکیبی (Synthetic division) خارج قسمت(quotient) و باقی‌مانده (remainder) را دریابید.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	5
	20	90	450	
4	18	90	455	

پس $Q(x)=4v^2+18v+90$ و $R=455$ می‌باشد.

فعالیت

توسط تقسیم ترکیبی، باقی‌مانده و خارج‌قسمت را دریابید.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

برای تقسیم پولینوم P(x) بالای (x−a) مقسوم را به شکل پولینوم مکمل به طور نزولی ترتیب می‌دهیم و بدون اجرای عملیهٔ تقسیم، توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقی‌مانده را به دست می‌آوریم که درجهٔ خارج‌قسمت به اندازهٔ یک، از درجهٔ مقسوم‌علیه کم می‌باشد.

تمرین

1- توسط تقسیم ترکیبی، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را دریابید.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ ، $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ ، $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- توسط تقسیم ترکیبی باقی‌مانده و خارج‌قسمت‌ها را دریابید.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

دریافت فکتور و قیمت پولینوم توسط تقسیم ترکیبی

1	+2	−5	−6	−1
	−1	−1	+6	
1	1	−6	0	

آیا به کمک تقسیم ترکیبی می‌توانید بگویید که $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $x^3+9x^2+27x+27$ می باشد؟

مثال 1: توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ می‌باشد.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

چون $R=0$ است؛ پس $(x-1)$ یک فکتور این پولینوم می‌باشد.

و یا این که:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

و یا توسط قضیه باقی‌مانده:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

مثال 2: آیا $(x+10)$ یک فکتور پولینوم x^3+3x^2-150 می‌باشد و یا خیر؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

چون $R=-850$ می‌باشد $(R\neq 0)$، پس $(x+10)$ فکتور پولینوم x^3+3x^2-150 نمی‌باشد.

مثال 3: قیمت پولینوم $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ را برای $x=2$ توسط تقسیم

ترکیبی دریابید.

حل: در اول پولینوم $P(x)$ را به طور نزولی ترتیب می کنیم.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

3	−12	5	25	2
	6	−12	−14	
3	−6	−7	11	

در نتیجه $P(2) = 11$ می‌باشد.

فعالیت

توسط تقسیم ترکیبی قیمت پولینوم $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ را برای $x = 1$ و $x = 3$ دریابید.

مثال4: توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که $(r-4)$ یک فکتور $r^4 - 256$ می‌باشد.

حل

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

$r - 4 = 0$

$r = 4$

1	0	0	0	−256	4
	4	16	64	256	
1	4	16	64	0	

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$

$$R = 0$$

درنتیجه $(r-4)$ یک فکتور $r^4 - 256$ می‌باشد.

دریافت جذرهای معادله توسط تقسیم ترکیبی

مثال5: اگر عدد (1) یک جذر معادلهٔ $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ باشد جذرهای دیگر این

معادله را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

حل

1	4	1	-6	1
	1	5	6	
1	5	6	0	

خارج‌قسمت x^2+5x+6 می‌باشد.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$

$$x^2+5x+6=0$$

$$(x+3)(x+2)=0$$

$$x=-3 \qquad x=-2$$

دو جذر دیگر این معادله -2 و -3 می‌باشند.

توسط تقسیم ترکیبی می‌توان فکتور و قیمت یک پولینوم و نیز جذر یک معادلهٔ پولینومی را دریافت کرد. اگر پولینوم $P(x)$ را بالای $(x-a)$ تقسیم نماییم و $(R=0)$ باشد، $(x-a)$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ است و عدد (a) جذر معادلهٔ پولینومی $P(x)=0$ می‌باشد.

تمرین

1- توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که $(x+\frac{1}{2})$ یک فکتور پولینوم $20x^3+7x+6$ و $(x+1)$ یک فکتور پولینوم x^4-2x^2+x+2 می‌باشد.

2- آیا $(x-0{,}1)$ یک فکتور پولینوم $10x^3-11x^2+1$ می‌باشد؟ چرا؟

3- توسط تقسیم ترکیبی قیمت پولینوم $6-y-6y^2+y^3$ را برای $y=6$ دریابید.

4- اگر عدد (1) یک جذر معادلهٔ $x^3+x^2-10x+8=0$ باشد جذرها دیگر این معادله را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

5- اگر عدد (-2) یک جذر معادلهٔ $x^3+4x^2+kx+8=0$ باشد به کمک تقسیم ترکیبی قیمت k را دریابید.

خلاصهٔ فصل

• افادهٔ الجبری به سه نوع می‌باشد، افادهٔ الجبری ناطق، افادهٔ الجبری غیر ناطق و افادهٔ الجبری پولینومی. مونوم عدد، یک متحول یا حاصل‌ضرب یک عدد و یک یا چندین متحول می‌باشد.

• حدودی که متحولین و درجه‌های‌شان عین چیز باشند حدود مشابه (Like terms) نامیده می‌شوند؛ مثل: $3x^2$ و $5x^2$ یا $4x^2y^2$ و $-6x^2y^2$ حدود مشابه‌اند.

• پولینوم عبارت از افادهٔ الجبری یک یا چنده حده می‌باشد که توان‌های حرف‌هاشان در ست اعداد مکمل شامل باشند.

• درجهٔ یک پولینومی که از یک حرف (متحول) تشکیل شده باشد عبارت از بزرگترین توان این حرف می‌باشد و اگر پولینوم از چند حرف تشکیل شده باشد درجهٔ مونومی که بزرگترین توان را داراست عبارت از درجهٔ پولینوم می‌باشد.

• به فکتور عددی (Numerical Factor) یک حد، ضریب می‌گویند؛ طور مثال: در $3x^2$ عدد 3 ضریب x^2 می‌باشد.

• تمام اعداد ثابت پولینوم‌ها اند که به نام پولینوم‌های ثابت یاد می‌شوند که درجهٔ پولینوم‌های ثابت صفر است، اما درجهٔ پولینوم صفری تعریف نشده است.

• پولینوم‌هایی که دارای یک متحول باشد و ضرایب حدود مشابه آن‌ها با هم مساوی باشند، به نام پولینوم‌های معادل یاد می‌شوند.

• قیمت یک پولینوم عددی است که در نتیجهٔ وضع‌کردن قیمت داده شده متحول در پولینوم به دست می‌آید.

• اگر یک پولینوم از بزرگترین توان متحول تا عدد ثابت تمام حدود را داشته باشد به نام پولینوم مکمل و اگر یک یا چند حد نداشته باشد به نام پولینوم ناقص یاد می‌شود.

• اگر یک پولینوم از کوچکترین توان متحول تا بزرگترین توان متحول ترتیب شود، پولینوم منظم صعودی و اگر از بزرگترین توان متحول تا کوچکترین توان ترتیب شود به نام پولینوم منظم نزولی یاد می‌شود.

• در عملیهٔ جمع پولینوم‌ها، حدود مشابه (Like terms) با هم جمع و در عملیهٔ تفریق

علامهٔ مفروق تغییر می‌کند و متباقی مراحل مثل عملیهٔ جمع، به انجام رسانده می‌شود. (معکوس جمعی مفروق با مفروق‌منه جمع می‌شود).

- در عملیه‌های جمع و ضرب پولینوم‌ها خاصیت‌های تبدیلی و اتحادی و نیزخاصیت توزیعی ضرب بالای جمع صدق می‌کند.
- در عملیهٔ ضرب پولینوم‌ها می‌توانیم مونوم را در مونوم، مونوم را در پولینوم و یا پولینوم را در پولینوم ضرب کنیم.
- به همین ترتیب در عملیهٔ تقسیم پولینوم‌ها، می‌توانیم مونوم را بر مونوم، پولینوم را بر مونوم و یا پولینوم را بر پولینوم تقسیم نماییم.
- اگر پولینوم $P(x)$ بالای $(x-a)$ تقسیم شود به اساس قضیهٔ باقی‌مانده، باقی با $\mathrm{P(a)}$ مساوی می‌باشد.
- اگر پولینوم $P(x)$ بالای $(x-a)$ تقسیم شود و باقی‌مانده صفر شود، $(x-a)$ یک فکتور پولنیوم $P(x)$ می‌باشد.
- به اساس معکوس قضیهٔ فکتور، اگر $\mathrm{(x-c)}$ یک فکتور پولینوم $\mathrm{M(x)}$ باشد؛ پس $\mathrm{P(c)=0}$ است و عدد c جذر معادله پولینومی $M(x)=0$ می‌باشد.
- توسط تقسیم ترکیبی می‌توان پولینوم $P(x)$ را بالای $(x-a)$ تقسیم نمود، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را به دست آورد و نیز توسط تقسیم ترکیبی در یک قیمت داده شده متحول، قیمت پولینوم $P(x)$ را نیز دریافت کرده می‌توانیم.
- توسط تقسیم ترکیبی جذرها معادلهٔ پولینومی $P(x)=0$ را می‌توان دریافت کرد.
- توسط قضیهٔ باقی‌مانده می‌توانیم افاده‌های الجبری را نیز تجزیه کنیم.

تمرین فصل

1 - قیمت k را دریابید در صورتی که:

a: اگر $(x+5)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+kx+125$ باشد.

b: اگر $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ باشد.

c: اگر $(x-2)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ باشد.

2 - توسط تقسیم ترکیبی خارج‌قسمت (Quotient) و باقی‌مانده (Remainder) را در یابید.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 - توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x-1)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ می‌باشد.

4 - توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که $(x-\frac{1}{2})$ یک فکتور پولینوم $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ می‌باشد.

5 - اگر $x=-\frac{1}{2}$ باشد قیمت پولینوم $P(x)=5x^2+x-9$ را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

6- اگر $x=3$ باشد قیمت پولینوم $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ را توسط تقسیم ترکیبی دریابید.

7 - توسط تقسیم ترکیبی نشان دهید که عدد 3 یک جذر معادلهٔ پولینومی $x^3-3x^2+x-3=0$ می‌باشد.

8 - توسط قضیهٔ فکتور نشان دهید که اعداد $1-$ و 2 جذرهای معادله $x^4-5x^2+4=0$ می‌باشند.

9 - قیمت k را توسط تقسیم ترکیبی دریابید در صورتی که $(x+3)$ یک فکتور پولینوم $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ باشد.

10 - توسط تقسیم ترکیبی خارج قسمت و باقی‌مانده را دریابید.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\quad$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11 - قیمت‌های b و c را در صورتی دریابید که: اگر پولینوم $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ را بر x^2-3x+2 تقسیم کنیم و باقیماند صفر شود.

12 - قیمت m را دریابید، در صورتی که: اگر پولینوم $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ بالای (x^2+2x-1) تقسیم شود باقی‌مانده صفر شود.

13 - اگر $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ و $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ باشد $Kb+La$ را دریابید.

14 - به کدام قیمت x پولینوم $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ بالای $(3x^2-1)$ پوره قابل تقسیم می‌باشد؟

15 - به کدام قیمت P پولینوم $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ بالای $(x-13)$ پوره قابل تقسیم می‌باشد؟

16 - اگر پولینوم $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ بالای $(2x+1)$ تقسیم گردد بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم می‌توانید بگویید که باقی‌مانده چند خواهد بود؟

a) -3 $\quad$ b) $-\frac{3}{2}$ $\quad$ c) 3 $\quad$ d) $\frac{7}{2}$

17 - قیمت m را، در صورتی دریابید که: اگر پولینوم $P(x)=5x^2+6x-7$ بر $(x+m)$ تقسیم شود باقی‌مانده (1) باشد.

a) 2 $\quad$ b) $\frac{-4}{5}$ $\quad$ c) -4 $\quad$ d) a و b درست اند

18 - اگرپولینوم $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ بالای $(x+3)$ تقسم گردد بدون انجام دادن عملیهٔ تقسیم بگویید که با قی‌مانده چند می‌باشد؟

a) صفر $\quad$ b) 13 $\quad$ c) -23 $\quad$ d) 7

19 - اگر $x=4$, $y=-3$ و $z=2$ باشد، قیمت افاده‌های الجبری زیر را دریابید.

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $\quad$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}Z^2$

20 - توسط تقسیم ترکیبی، قیمت‌های پولینوم‌های زیر را برای قیمت‌های داده شده x

دریابید:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$$
$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$$
$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$$
$$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$$

21 - یک،یک جذر معادلات زیر داده شده‌اند. توسط تقسیم ترکیبی، جذرهای دیگر این معادله‌ها را معلوم کنید.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یک جذر آن (3) می‌باشد.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یک جذر آن (1−) می‌باشد.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یک جذر آن (1−) می‌باشد.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یک جذر آن (1−) می‌باشد.

22 - اگر $P(x) = 0$ باشد درجهٔ پولینوم $P(x)$ چند است؟

d) تعریف نشده است　　c) صفر　　b) −1　　a) 1

23 - از مساحت مستطیلی که ابعاد آن $(x+5)$ و $(x+2)$ می‌باشد مساحت مستطیل را تفریق کنید که ابعاد آن $(x+3)$ و $(x+1)$ باشند.

24 - اگر $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ و $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ باشد قیمت A را دریابید.

25 - اگر $(x-1)^3$ و $x^3 + ax^2 + bx + c$ پولینوم‌های معادل باشند قیمت b مساوی است به:

a) 1　　b) 3　　c) −3　　d) −1

26 - حاصل افادهٔ $(a - \dfrac{2}{a-1})\,(a \div \dfrac{a+1}{a-1})$ مساوی است به:

a) $a(a+1)$　　b) $a(a-2)$　　c) $\dfrac{a-2}{a}$　　d) $\dfrac{a-1}{a}$

27 - حاصل‌ضرب $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ مساوی است به:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 - پولینوم‌های زیر را به طور نزولی (Descending Order) ترتیب و نیز درجه‌های آنها را معلوم کنید:

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 - در پولینوم $Q(x)=x^2+3x-5$ قیمت $Q(-1)$ مساوی است به:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 - اگر $P(x)=x^2-2x+3$ و $Q(x)=2x^2+3x-1$ باشد قیمت افاده‌های زیر را دریابید:

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - پولینوم‌های زیر را نظر به y به طور نزولی ترتیب نمایید:

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 - در افاده‌های الجبری زیر، پولینوم‌ها، افاده‌های ناطق و غیرناطق الجبری را نشان دهید.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 - حاصل افادۀ $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ مساوی است به:

$a)$ 1 $b)$ صفر $c)$ -1 $d)$ 2

34 - حاصل‌ضرب دو افادۀ الجبری $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ می‌باشد؛ اگر یک افادۀ الجبری $(a+b+c)$ باشد افادۀ دیگری را معلوم کنید.

35 - خارج‌قسمت‌ها را دریابید.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\quad$ $(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\quad$ $(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\quad$ $\dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 - ضرب کنید.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\quad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\quad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\quad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - افاده‌های زیر را ساده و جمع کنید.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\quad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\quad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

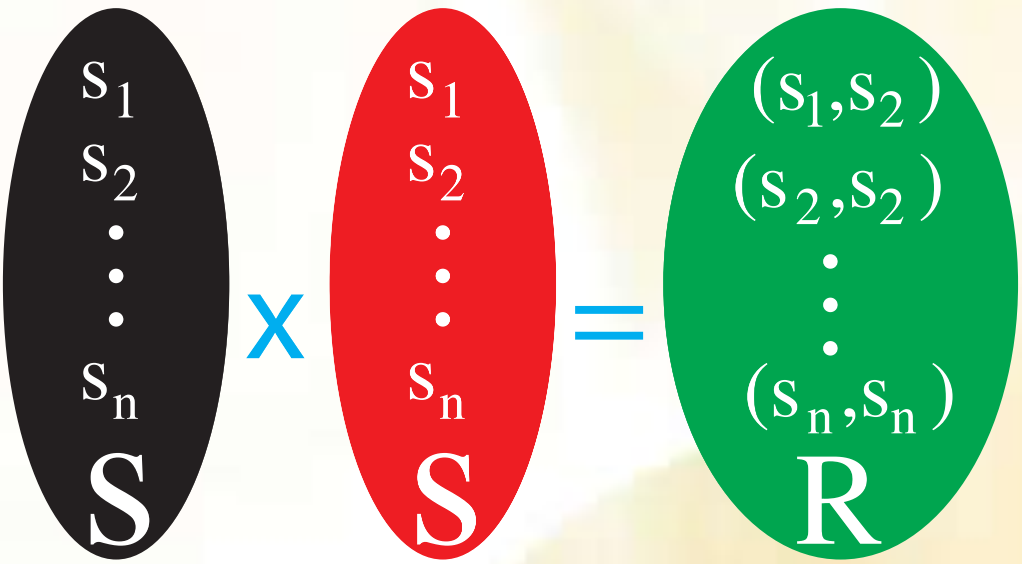
$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\quad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

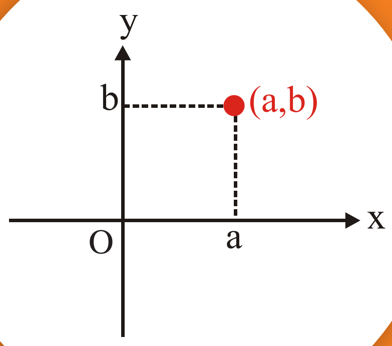
38 - درجه کدام مونوم (یک حده) داده شدهٔ زیر صفر می باشد؟

a) x $\quad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\quad$ c) $\sqrt{2}$

فصل دوم
رابطه


s1
s2
sn
S
x
s1
s2
sn
S
=
(s1,s2)
(s2,s2)
(sn,sn)
R

جوره‌های مرتب و مستوی کارتیزینی



- جورهٔ مرتب (a,b) در کدام صورت با جورهٔ مرتب (c,d) مساوی شده می‌تواند؟
- آیا جورهٔ مرتب (a,b) با جورهٔ مرتب (b,a) مساوی می باشند؟

اگر a و b عناصر یک ست و یا عناصر ست‌های مختلف باشند و a را عنصر اولی و b را عنصر دومی قبول کنیم در این صورت (a,b) را جورهٔ مرتب می‌گویند و (b,a) نیز یک جورهٔ مرتب می‌باشد که $(a,b) \neq (b,a)$ است، در صورتی دو جورهٔ مرتب (a,b) و (c,d) مساوی شده می‌توانند که $a=c$ و $b=d$ باشد.

مثال 1: اگر $(x-2, y+1) = (1,3)$ باشد، قیمت‌های x و y را دریابید.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعالیت

اگر $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ باشد قیمت‌های a و b را دریابید.

مستوی کارتیزینی (Cartesian Plane)

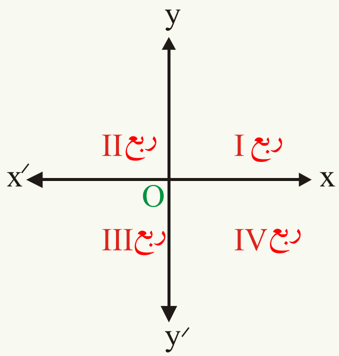
دو خط عمودی و افقی را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را به نام مبدأ (Origin) بنامید، خط افقی را محور X و خط عمودی را محور Y می گویند.

محور X را به X'OX و محور Y را به Y'OY نشان دهید.

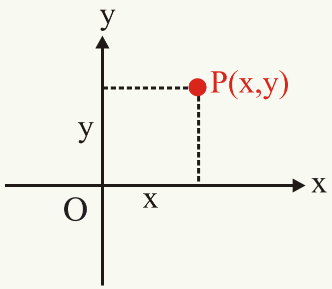
مستویی که در آن این محورها واقع اند به نام مستوی کارتیزینی یاد می‌شود.

هر دو محور، مستوی را به چهار حصهٔ مساوی تقسیم می کند که هر حصهٔ آن را ربع (Quadrant)

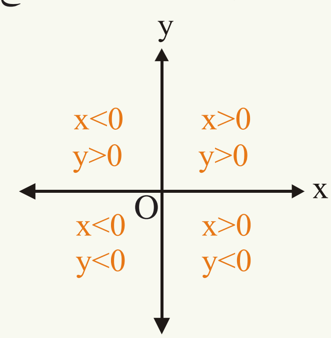
می گویند که به خلاف حرکت عقربهٔ ساعت (Anti clockwise) به ترتیب عبارت از ربع اول، دوم، سوم و چهارم می‌باشند، طوری که در شکل مشاهده می‌شود.



موقعیت نقطهٔ P در این مستوی توسط جورهٔ مرتب اعدادحقیقی (x,y) طوری نشان داده می‌شود که x فاصلهٔ افقی نقطهٔ P از محور Y بوده، در صورتی که y فاصلهٔ عمودی نقطهٔ P از محور X می‌باشد.

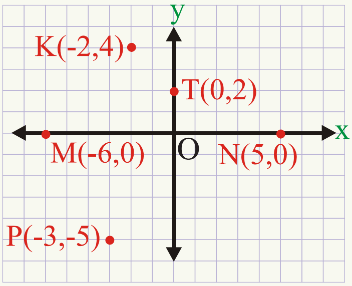


اگر نقطهٔ P به طرف راست محور y واقع باشد قیمت x، مثبت و اگر به طرف چپ محور Y واقع باشد قیمت x منفی می‌باشد؛ اگر نقطهٔ P به روی محور Y واقع باشد $x = 0$ می‌باشد.
همچنین اگر نقطهٔ P بالاتر محور X واقع باشد قیمت y مثبت و اگر پایین تر از محور X واقع باشد قیمت y منفی $(y<0)$ می‌باشد.
اگر نقطهٔ P به روی محور X واقع باشد $y=0$ می‌باشد.
که به طور خلص در شکل نشان داده شده‌اند.

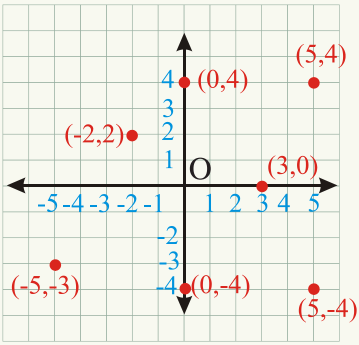


x و y را مختصات کارتیزینی (Cartesian Coordinates) می‌گویند که در $P(x,y)$ عنصر اولی یا x را به نام فاصله (abscissa) و عنصر دومی y را به نام ترتیب (Ordinate) یاد می کنند. مختصات مبدأ عبارت از $(0,0)$ می‌باشد. واضح است که برای هر جورهٔ مرتب اعداد حقیقی یک نقطهٔ (x,y) در مستوی و برای هر نقطه از مستوی یک جوره از اعداد حقیقی ارتباط دارند.

مثال2: نقاط $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ و $M(-6,0)$ را در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.



مثال3: برای هر نقطه که در شکل زیر نشان داده شده است جورهٔ مربوطه آن را بنویسید.



فعالیت

نقاط $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ و $(0,1)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.

تمرین

1 - اگر فاصلهٔ نقطهٔ p مثبت و ترتیب نقطهٔ P منفی باشد، نقطهٔ p در کدام ربع واقع است؟

2 - اگر چهار رأس یک شکل عبارت از $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ و $D(3,-3)$ باشند این شکل کدام شکل هندسی می‌باشد؟

3 - مثلثی که سه رأس آن $A(2,0)$, $B(0,2)$ و $C(0,0)$ باشد در مستوی کمیات وضعیه رسم کنید و بگویید که این چه نوع مثلث است؟

4 - نقاط $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ را در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

5 - بگویید که جوره‌های مرتب ذیل در کدام ربع واقع اند؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

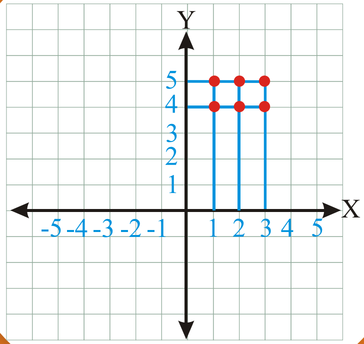
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

حاصل‌ضرب کارتیزینی و گراف آن



آیا در شکل مقابل $A\times B$ را نشان داده می‌توانید؟

فعالیت

اگر $A\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$ باشد:

- $A\times B$ را دریابید.
- تعداد عناصر $A\times B$ را دریابید.
- آیا $A\times B=B\times A$ می‌باشد؟
- آیا $A\times A$ و $B\times B$ را دریافت کرده می‌توانید؟

اگر A و B دو ست غیر خالی باشند $A\times B$ طور زیر تعریف شده است:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

بدین معنی که حاصل‌ضرب $(A\times B)$ عبارت از ستی می‌باشد که عناصر آن جوره‌های مرتب (x,y) می‌باشند که x عنصر ست A و y عنصر ست B باشد. اگر $B\neq A$ باشد، پس $A\times B\neq B\times A$ می‌باشد.

اگر تعداد عناصر ست A به m و تعداد عناصر ست B به n نشان داده شود، تعداد عناصر $A\times B$ عبارت از $(m\times n)$ می‌باشد.

مثال 1: اگر $A=\{0,1,2\}$ و $B=\{3,4\}$ باشد $A\times B, B\times A$ و $A\times A$ را دریابید.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

فعالیت

اگر $A=\{-4,-1,0\}$ و $B=\{1,4\}$ باشد $A\times A, A\times B$ و $B\times B$ را در یابید.

مثال2: اگر $IN=\{1,2,3...\}$ و $L=\{0\}$ باشد $IN\times L$ را دریابید.

حل

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

مثال3: اگر $IN=\{1,2,3...\}$ و $W=\{0,1,2,3...\}$ باشد $W\times IN$ را دریابید.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

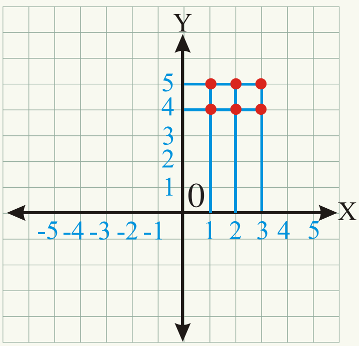
گراف حاصل‌ضرب کارتیزینی (Graph of Cartesian Product)

می‌توانیم حاصل‌ضرب کارتیزینی را در مستوی کمیات وضعیه نیز نشان دهیم.

مثال4: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5\}$ باشد $A\times B$ را دریابید و در مستوی کمیات وضعیه نشان دهید.

حل

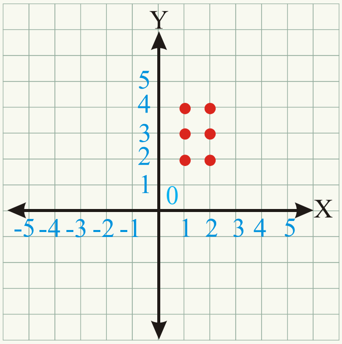
$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



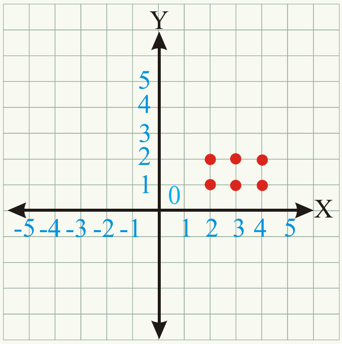
به روی محور x اعداد 1,2,3 و به روی محور Y اعداد 4 و 5 را تعیین می‌نماییم. از 2,1 و 3 خطوط عمود و از 4 و 5 خطوط افقی را رسم می‌نماییم. نقاط تقاطع این خطوط جوره‌های مرتب $A\times B$ رانشان می‌دهد.

مثال5: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{2,3,4\}$ باشد $A\times B$ و $B\times A$ را دریابید و در شکل مشخص کنید.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$
$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

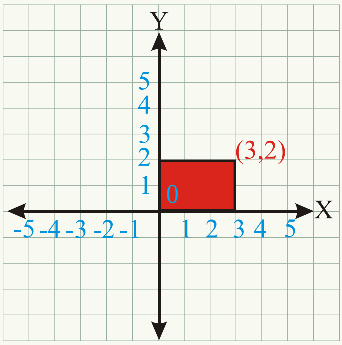


$B\times A$

مثال6: اگر $A=\{x/x\in IR, 0\le x\le 3=[0,3]\}$ و $B=\{y/y\in IR, 0\le y\le 2=[0,2]\}$ باشد $A\times B$ را در شکل نشان دهید.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3\wedge 0\le y\le 2\}$$



فعالیت

اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{3,4\}$ باشد $A\times B$ را دریابید و در شکل نشان دهید.

تمرین

1 - اگر:

i) $A=\{-1,1,3\}$ و $B=\{2,4\}$

ii) $A=\{-1,1\}$ و $B=\{2,3\}$

باشد $A\times B$ را دریابید و در شکل نشان دهید.

2 - برای ست‌هایی که در سؤال اول داده شده‌اند $B\times A$ را دریابید و درشکل نشان دهید.

3 - اگر $A=\{1,2,3\}$ باشد $A\times A$ را دریابید.

4 - اگر $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,3,5\}$ باشد $A\times B, B\times A, A\times A$ و $B\times B$ را دریابید.

رابطه (Relation)



عطاالله برادر عزت‌الله می‌باشد.
(عطاالله R عزت‌الله) که برادر بودن نیز یک رابطه می‌باشد.

ستی که از جوره‌های مرتب اشیا و مفاهیم تشکیل شده باشد عبارت از رابطه است یا اگر A و B دو ست غیر خالی (non empty sets) باشند، پس هر ست فرعی $A \times B$ یک رابطه است از A در B.

اگر $(a,b) \in R$ باشد می گویند که a با b رابطه دارد و به شکل (aRb) نوشته می‌شود؛ اگر R یک رابطه از A در B باشد، پس $R \subset A \times B$ می‌باشد و اگر R ست فرعی از $A \times A$ باشد، پس R رابطه‌یی در A است.

مثال 1: اگر $A = \{x, y\}$ و $B = \{1,2\}$ باشد $A \times B$ را دریابید و چهار رابطه را از A در B بنویسید.

حل

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1 = \{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2 = \{(y,1)\}$$
$$R_3 = \{(y,2)\}$$
$$R_4 = \{(x,1),(y,1)\}$$

که عناصر $A \times B$ چهار می‌باشد و تعداد تمام ست‌های فرعی $A \times B$ یا تمام روابط از A در B عبارت از $2^4 = 16$ می‌باشد، پس تعداد تمام روابط از A در B مساوی به 16 می‌باشد.

مثال 2: اگر $A = \{1,3,5,...19\}$ که تعداد عناصر A مساوی به 10 می‌باشد و $B = \{2,4,6\}$ که تعداد عناصر B سه می‌باشد مجموع تمام جوره‌های مرتب $A \times B$ یا تعداد عناصر $A \times B$ عبارت از $10 \times 3 = 30$ می‌باشد و تعداد تمام رابطه‌ها از A در B عبارت از 2^{30} می‌باشد.

متوجه باید بود که: ϕ و $A\times B$ در ست‌های فرعی شامل می‌باشند.

مثال3: اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ باشد سه رابطه را از A در B بنویسید.

حل

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

که سه رابطهٔ آن عبارت اند از:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

اگر $R=\{(x,y)/x+y=5\}$ یک رابطه در $A=\{1,2,3,4\}$ باشد، عناصر R را بنویسید.

مثال4: اگر $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ یک رابطه در $A=\{1,2,3,4\}$ باشد، عناصر R را بنویسید.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ می‌باشد.

ناحیهٔ تعریف (Domain) و ناحیهٔ قیمت‌های (Range) یک رابطه

می‌دانیم اگر R یک رابطه از A در B باشد، پس $R\subseteq A\times B$ می‌باشد، بدین معنی که R یک ستی است که عناصر آن جوره‌های مرتب (x,y) می‌باشند؛ طوری که $x\in A$ و $y\in B$ می‌باشد.

ناحیهٔ تعریف رابطهٔ R عبارت از عناصر اولی جوره‌های مرتب می‌باشد و به Dom_R نشان داده می‌شود؛ همچنین ناحیهٔ قیمت‌های (Range) رابطهٔ R عناصر دومی جوره‌های مرتب می‌باشند و به $Range_R$ نشان داده می‌شود.

مثال1: اگر $A=\{1,2\}$ و $B=\{x,y\}$ باشد و R یک رابطه از A در B باشد، اول عناصر این رابطه را بنویسید؛ سپس ناحیهٔ تعریف (Dom_R) و ناحیهٔ قیمت‌ها ($Range_R$) را بنویسید.

حل

$R=\{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

$Dom_R=\{1,2\}$ و $Range_R=\{x,y\}$

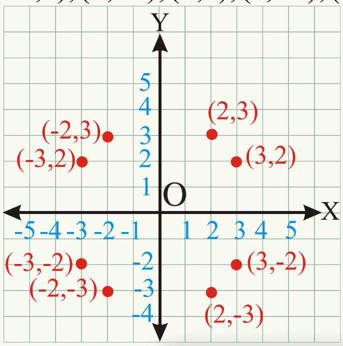
مثال 2: اگر رابطهٔ $R=\{(x,y)/x^2+y^2=13\}$ در ست $A=\{-3,-2,1,2,3\}$ تعریف شده باشد. اول عناصر رابطهٔ (R) را به صورت جوره‌های مرتب بنویسید.

بعد ناحیهٔ تعریف Dom_R و ناحیهٔ قیمت‌های ($Range_R$) را تعیین کنید، سپس گراف آن را رسم کنید.

$R=\{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R=\{-3,-2,2,3\}$

$Range_R=\{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

اگر $R=\{(x,y)/y=2x\}$ باشدو ناحیهٔ تعریف R عبارت از $\{0,4,8\}$ باشد ناحیهٔ قیمت‌های R را تعیین کنید.

معکوس یک رابطه (Inverse of a Relation)

اگر R یک رابطه از A در B باشد معکوس R که به صورت R^{-1} نشان داده می‌شود عبارت است از:

$R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$

$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$

ناحیهٔ تعریف R عبارت از ناحیهٔ قیمت‌های R^{-1} و ناحیهٔ تعریف R^{-1} عبارت از ناحیهٔ قیمت‌های R می‌باشد.

مثال: اگر $R=\{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ یک رابطه درست اعداد طبیعی باشد، معکوس رابطهٔ R یا R^{-1} را مشخص کنید.

حل

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

رابطهٔ معادل (Equivalent Relation): رابطهٔ R را در ست A رابطهٔ معادل می‌گویند که سه خاصیت زیر را داشته باشند.

1- خاصیت انعکاسی (Reflexive Property): برای هر عنصر $x \in A$ جورهٔ مرتب $(x,x) \in R$ باشد یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- خاصیت تناظری (Symmetric Property): از شمولیت (x,y) در R جورهٔ مرتب (y,x) نیز در R شامل باشد، یا $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - خاصیت انتقالی (Transitive Property): اگر $(x,y) \in R$ و نیز $(y,z) \in R$ باشد، در نتیجه (x,z) نیز شامل R باشد. یا $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

مثال 1: رابطهٔ مساوات در ست اعداد حقیقی یک رابطهٔ معادل است:

1- برای هر x از اعداد حقیقی x=x می‌باشد 5=5 (خاصیت انعکاسی)

2- اگر x=y باشد، پس y=x می‌باشد (خاصیت تناظری)

3- اگر x=y و y=z باشد، پس x=z می‌باشد (خاصیت انتقالی)

تمرین

1- اگر $A = \{1,2\}$ و $B = \{0,4,6\}$ باشد:

سه رابطه را از A در B بنویسید.

چهار رابطه را از B در A بنویسید.

در ست A چهار رابطه را نشان دهید.

2- اگر $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,3,5\}$ و $R = \{(x,y) | y < x\}$ یک رابطه از A در B باشد عناصر R را بنویسید.

3- اگر در ست اعداد طبیعی $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ در ست اعداد طبیعی یک رابطه باشد که ناحیهٔ تعریف (Domain) آن تمام اعداد طبیعی باشند (Range) آن را تعیین کنید.

خلاصه فصل

• (a,b): که در آن ترتیب نوشتن اهمیت دارد جورهٔ مرتب نامیده می‌شود که a را مختصهٔ اول و b را مختصهٔ دوم می‌گویند به طور عموم $(a,b) \neq (b,a)$ می‌باشد.

• دو جورهٔ مرتب (a,b) و (c,d) در صورتی با هم مساوی می‌باشند که: a=c و $b=d$ باشد.

• **حاصل‌ضرب کارتیزینی** (دکارتی) دو ست A و B که با $A\times B$ نشان داده می‌شود، این طور تعریف گردیده است: $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \wedge y\in B\}$

• اگر تعداد عناصر ست A را به m و تعداد عناصر ست B را به n نشان دهیم تعداد عناصر $A\times B$ عبارت از $m\times n$ می‌باشند.

• می‌توانیم که حاصل‌ضرب دو ست A و B، $(A\times B)$ را در مستوی کمیات وضعیه نیز نشان دهیم.

• **رابطه:** هر ست فرعی $A\times B$ یک رابطهٔ R از ست A در B می‌باشد.
$R\subset A\times B$ و اگر $R\subset A\times A$ باشد در آن صورت R یک رابطه در A است.

• اگر تعداد عناصر ست A را به n نشان دهیم تعداد ست‌های فرعی A عبارت از 2^n می‌باشد.

• اگر تعداد عناصر ست A را به m و تعداد عناصر ست B را به n نشان دهیم تعداد روابط از A در B عبارت از 2^{mxn} می‌باشد

• اگر R یک رابط از A در B باشد ناحیهٔ تعریف Dom_R عبارت از ست عناصر اولی جوره‌های مرتب و ناحیه قیمت‌های R□ $(Range_R)$ عبارت از عناصر دومی جوره‌های مرتب R می‌باشند.

• **معکوس یک رابطه:** اگر R یک رابطه از A در B باشد معکوس رابطه R را به R^{-1} نشان می‌دهد که:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$$

واضح است ناحیهٔ تعریف R^{-1} با ناحیهٔ قیمت‌های R و ناحیه قیمت‌های R^{-1} با ناحیهٔ تعریف R مساوی می‌باشد.

• **رابطهٔ معادل:** R را درست A یک رابطهٔ معادل می‌گویند اگر سه خاصیت زیر را داشته باشند.

1- خاصیت انعکاسی 2- خاصیت تناظری 3- خاصیت انتقالی

تمرین فصل

1- اگر $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ باشد $B\times A, A\times B$ و $A\times A$ را دریابید.

2- اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{0,1\}$ باشند $A\times B$ را در شکل نشان دهید.

3- اگر $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ باشد قیمت‌های x و y را دریابید.

4- رابطهٔ R را در $A=\{1,3,5\}$ طوری به دست آورید که R رابطهٔ مساوات باشد.

5- اگر $A=\{a,b\}$ باشد عناصر A^2 را بنویسید

6- اگر رابطهٔ $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ در ست اعداد حقیقی تعریف شده باشد گراف رابطهٔ R را ترسیم کنید.

7- اگر رابطهٔ $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ در ست اعداد حقیقی تعریف شده باشد گراف رابطهٔ R را ترسیم نمایید.

8- اگر رابطه $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ باشد ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های R^{-1} را مشخص کنید.

9- اگر $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ باشد ناحیه‌های تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های R و R^{-1} را بنویسید.

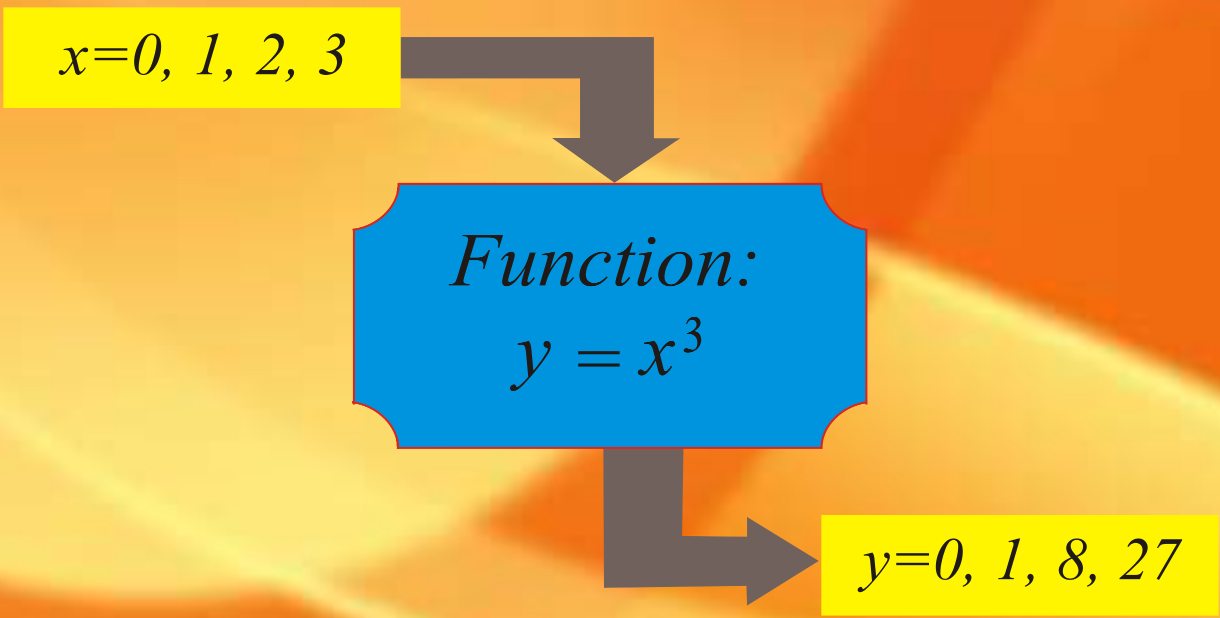
10- اگر $A=\{3,6,12\}$ و $B=\{-1,0\}$ باشد تعداد رابطه‌ها را در A و تعداد رابطه‌های از A در B را دریابید.

11- اگر دو جورهٔ مرتب $(4a+1,2b+a)$ و $(5,3a-4b)$ با هم مساوی باشند قیمت‌های a و b را دریابید.

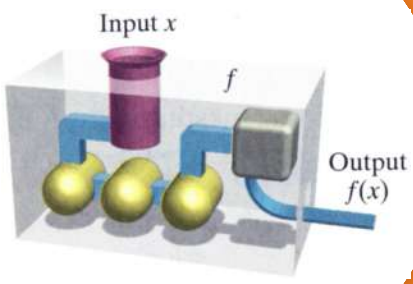
12- اگر $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{x,y\}$ باشد $A\times B$ و $B\times A$ را دریابید.

فصل سوم

تابع


x=0, 1, 2, 3
Function:
y = x3
y=0, 1, 8, 27

تابع (function)



آیا تابع و رابطه باهم فرق دارند؟

فعالیت

- آیا هر تابع یک رابطه و هر رابطه یک تابع می‌باشد؟
- آیا هر ست، جوره‌های مرتب یک تابع را نشان می‌دهد؟
- آیا می‌توانید تابع را به شکل یک ماشین فکر کنید؟

بار اول مفهوم تابع، توسط یک ریاضی‌دان جرمنی به نام لیبنز (Leibniz) (1646 – 1716) معرفی شد.

تابع، یک رابطه یا قاعده‌یی است که یک کمیت را با کمیت دیگر ارتباط می‌دهد. غرض وضاحت مفهوم تابع، مثال‌های زیر را درنظر بگیرید.

1- مساحت یک مربع (A) با ضلع مربع (x) مربوط می‌باشد. معادله‌یی که مساحت مربع را با ضلع مربع مربوط می‌سازد. عبارت از: $A = x^2$ می‌باشد.

ضلع مربع x	1	2	3	4	5	...
مساحت مربع A	1	4	9	16	25	...

یا مساحت مربع، تابع ضلع مربع می‌باشد، یعنی $A = f(x)$

2- نفوس جهان (p) با وقت (t) ارتباط دارد. نفوس جهان را در سال‌های مختلف به حساب ملیون طور تقریبی در جدول زیر مشاهده کنید:

سال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس به ملیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

دیده می‌شود که نفوس (Population) یا P تابع وقت (t) می‌باشد یا $p = f(t)$

3- مساحت دایره (A)، با شعاع دایره (r)، ارتباط دارد. ($A = \pi r^2$)

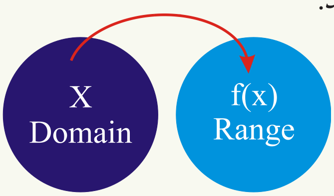
4- حجم کرهٔ (V) مربوط شعاع کرهٔ (r) می‌باشد که این ارتباط توسط معادلهٔ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ نشان داده می‌شود.

از مثال‌های فوق نتیجه گرفته می‌شود که در مفهوم تابع، ارتباط نقش مرکزی را دارد؛ طور مثال: عمر هر انسان با یک عدد ارتباط دارد، در یک مغازه هر جنس با یک قیمت مشخص ارتباط دارد، هر موتر با یک نمرهٔ مشخص جوازسیر ارتباط دارد، ومکعب هر عدد، یک عدد می‌باشد. ($2^3 = 8$, $3^3 = 27$)

درمثال‌های فوق مشاهده می‌شود که مساحت (A)، نفوس p وحجم v، بالترتیب تابع ضلع مربع (x)، وقت (t) وشعاع کرهٔ (r) می‌باشند که مساحت، نفوس و حجم را متحول مقید (dependentVariable) و کمیت‌هایی از قبیل ضلع مربع، شعاع کره و وقت را متحول آزاد (Independent Variable) می‌گویند. می‌توان تابع را چنین تعریف کرد:

تعریف

تابع در بین دو ست یک رابطه یا قاعدیی می‌باشد، طوری‌که هر عنصر ست اولی محض با یک عنصر ست دومی ارتباط داشته باشد که ست اولی را به نام ناحیهٔ تعریف (domain) وست دومی را به نام ناحیهٔ قیمت‌ها (Range) یاد می‌کنند.



یا تابع عبارت از ست جوره‌های مرتب می‌باشد که عناصر اولی آن تکرار نشده باشند.

اگر $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ باشد رابطهٔ S یک تابع را نشان می‌دهد؛ زیرا که عناصر اولی جوره‌های مرتب آن تکرار نشده اند.

$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

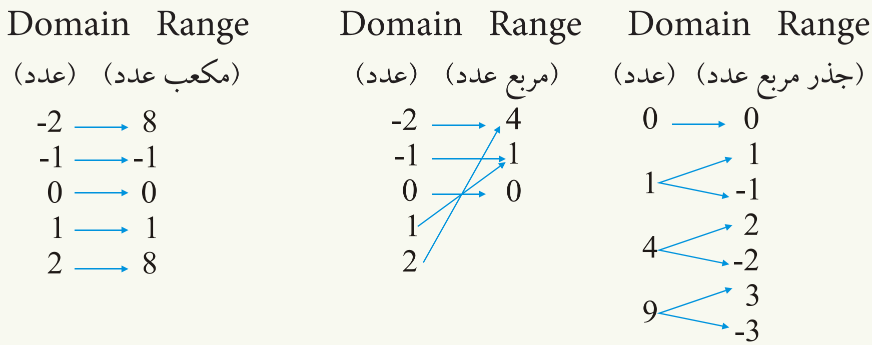
$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

فعالیت

اگر $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ باشد آیا T یک تابع را نشان می‌دهد؟

مثال 1: درجدول‌های زیر کدام یک از آن‌ها، یک تابع را نشان می‌دهد؟

(جدول I) (جدول II) (جدول III)



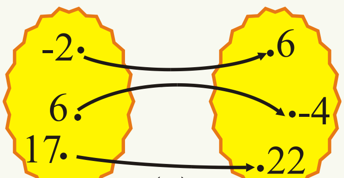
جدول I و II تابع را نشان می‌دهد، اما جدول III یک تابع را نشان نمی‌دهد، زیرا که یک عنصر ست اولی یا (Domain) با دو عنصر ست دومی یا Range ارتباط دارد. یا به عبارت دیگر، عناصر اولی ست جوره‌های مرتب تکرار گردیده‌اند که جوره‌های مرتب آن $(1 , 1),(1 , -1),(4 , 2),(4 , -2),(0,0),(9 ,3),(9 , -3)$ می‌باشد و یا این‌که برای یک عنصر ست اول دو تصویر (Images) در ست دوم موجود است. خیلی‌خوب خواهدبود که تابع را به شکل یک ماشین فکر کنیم. شکلی که در صفحهٔ اول فصل داده شده است مواد خام (input) یا Domain و خروجی (output) یا $f(x)$ به نام Range یاد می‌شوند.

اگر A و B ست‌های فرعی از اعداد حقیقی باشند هر تابعی از A به B به نام تابع حقیقی یاد می‌شود. متوجه باشید که: $Range \subseteq codomain$ می‌باشد.

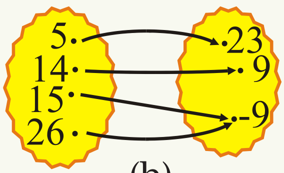
مثال 2: اگر $f = \{(-5,3m) , (-5,2m-10) , (1,2)\}$ نشان دهنده یک تابع باشد، قیمت m را معلوم کنید.

حل: چون $-5 = -5$ است باید $3m = 2m - 10$ باشد، درنتیجه $m = -10$ می‌شود بدین معنا برای این که f یک تابع باشد باید $m = -10$ باشد.

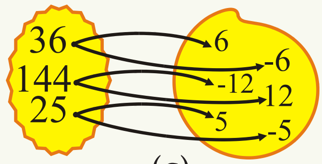
مثال 3: کدام‌یک از دیاگرام‌های زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟



(a)



(b)



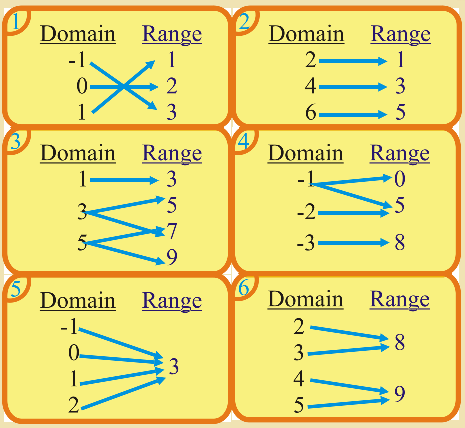
(c)

حل: دیاگرام a و b یک تابع را نشان می‌دهد، اما دیاگرام c یک تابع را نشان نمی‌دهد.

تابع دربین دو ست x و y یک رابطه می‌باشد که هر عنصر ست X یا (Domain) محض با یک عنصر ست Y یا (Range) ارتباط داشته باشد. که x را متحول آزاد و y را متحول مقید می گویند. یا تابع، ست جوره‌های مرتب می‌باشد که عناصر اولی آن تکرار نشده باشند.

تمرین

1- کدام‌یک از جدول‌های مقابل یک تابع رانشان می‌دهد؟



2- کدام‌یک از ست‌های جوره‌های مرتب زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ ناحیهٔ تعریف (Domain) و ناحیهٔ قیمت‌های (Range) آن‌ها را تعیین کنید.

1– $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

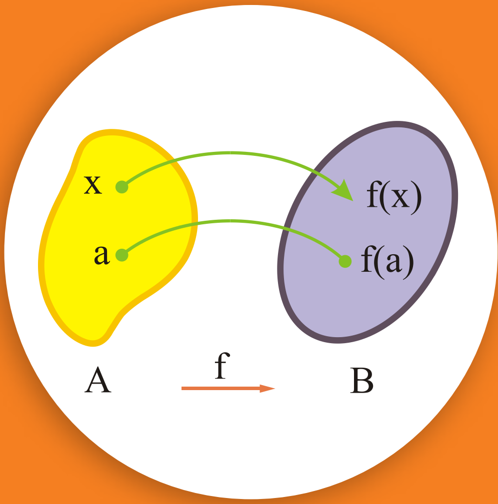
3– $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

طرق نوشتن و قیمت یک تابع



- چه‌وقت یک معادله یک تابع را نشان می‌دهد؟
- چه‌وقت یک رابطه یک تابع را نشان می‌دهد؟
- درکدام حالت یک جدول یک تابع را نشان می‌دهد؟

برای اولین‌بار ریاضی‌دان سویسی ایولر (1783 -1707) (Euler) این عبارت که y تابع از x است توسط معادلهٔ $y = f(x)$ نشان داد که $f(x)$ عبارت از قیمت y یا قیمت f برای عدد x می‌باشد. اگر $f(x)$ تابعی از A به B باشد به طور زیر نشان داده می‌شود:

$$f : A \to B$$

$$y = f(x) \qquad \text{یا}$$

درشکل x عبارت از (input) و $f(x)$ عبارت از (output) می‌باشد توابع با حروف g, h, f وغیره نشان داده می‌شوند.

توابع به طور عموم به 4 طریق نشان داده می‌شوند.

1 – به طور شفاهی (Verbally) توسط عبارات.
2 – به طور عددی (Numerically) توسط یک جدول.
3 – مشاهده‌یی (Visually) توسط گراف.
4 – به شکل الجبری (Algebraically) توسط فورمول صریح (واضح).

فعالیت

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ طور زیر درجدول داده شده باشد قیمت این توابع را در قیمت‌های داده شدهٔ x دریابید، یا به عبارت دیگر، ساحهٔ تعریف (Domain) داده شده است قیمت‌های مربوطهٔ تابع (Range) را دریابید.

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

مثال1: اگر $f(x)=x^2+3x-2$ باشد $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ و $f(a)$ را دریابید.

حل

قیمت های تابع	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	ساحهٔ تعریف تابع
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$, $f(0)=-2$, $f(-3)=-2$, $f(a)=a^2+3a-2$

مثال2: اگر $f(x)=x^2+3x+5$ باشد $f(-x)$, $f(x+3)$ □ $f(2)$ را دریابید.

حل

$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$

$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$

$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$

فعالیت

اگر $g(x)=x^2-2x+7$ باشد. $g(-x)$, $g(x+4)$ □ $g(-5)$ را دریابید.

مثال3: اگر $h(x)=3-2x$ و $f(x)=2x+6$ باشد. $f(-1)$, $h(6)$ و

$f(-1)+f(3)$ را دریابید.

حل

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$h(6) = 3 - 2\cdot 6 = 3 - 12 = -9$$
$$f(-1) + f(3) = 4 + 2\cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

مثال4: اگر $f(x) = ax^2 - bx + 1$ □ $f(1) = 0$ و $f(3) = 10$ باشد قیمت‌های a و b را دریابید.

حل

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$
$$\underline{0 = _\ 3a \mp 3b \pm 3}$$

$10 = 6a - 2$ $\qquad$ $10 = 18 - 3b + 1$

$12 = 6a$ $\qquad$ $3b = 19 - 10$

$a = 2$ $\qquad$ $3b = 9$

$b = 3$

مثال5: کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟

$a:\quad x^2 + y = 4 \qquad\qquad b: x^2 + y^2 = 4$

حل: یک معادله وقتی نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که برای هر x یک y وجود داشته باشد.

$$a:\quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$$

برای هرقیمت x یک قیمت y وجود دارد؛ طور مثال اگر $x = 1$ باشد $y = 4 - 1^2 = 3$

پس $y = 4 - x^2$ یک تابع می‌باشد.

$$b:\quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

برای یک قیمت x دو قیمت y وجود دارد. پس y یک تابع نیست.

طور مثال: اگر $x = 1$ باشد $y = \pm\sqrt{3}$ می‌شود $(1\,,\,\sqrt{3})(1\,,\,-\sqrt{3})$ که عناصر اولی آن تکرار شده اند.

فعالیت

نشان دهید که معادلات $y-x^2=1$ و $x^3-y=2$ نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشند و معادلهٔ $x^2+y^2=4$ نشان دهندهٔ یک تابع نیست.

روش نوشتن یک تابع، $y=f(x)$ می‌باشد. برای یافتن قیمت یک تابع، قیمت داده شدهٔ x را در معادلهٔ تابع وضع می‌نماییم قیمت تابع به دست می‌آید. یک معادله وقتی نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که برای هر x یک y وجود داشته باشد.

تمرین

1- اگر $g(x)=x^2+x-2$ و $f(x)=2x^2+3x-1$ باشد $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2), f(-3)$ و $\frac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ را معلوم کنید.

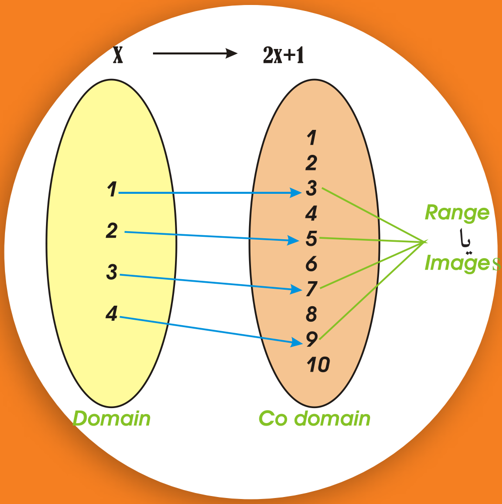
2 - اگر $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ باشد. $f(-2)$ ، $g(0)$ و $f(x-1)$ را دریابید.

3- اگر $g(x)=3\sqrt{x}$ و $h(x)=1+4x$ باشد $h(16)$ ، $h(-3)$ و $g(-4)$ را دریابید.

4- $f(x)=\frac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ و $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ باشد $g(-7), f(6)$ و $f(0)+g(4)-h(-3)$ را دریابید.

5 - اگر $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ باشد $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ و $g(-2)$ را در یابید.

6 - آیا معادلهٔ $x^2+xy=1$ یک تابع را نشان می‌دهد؟



یافتن ناحیهٔ تعریف یک تابع

آیا ناحیهٔ تعریف هر تابع ســت تمام اعداد حقیقی می‌تواند باشد؟

فعالیت

- کدام قیمت‌های x در دومین (Domain) یک تابع شامل می‌باشند؟
- ناحیهٔ تعریف تابع، $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ را تعیین کنید.
- آیا در ناحیهٔ تعریف تابع $g(x)=3\sqrt{x}$ عدد $x=-4$ شامل می‌باشد؟

در ناحیهٔ تعریف (Domain) یک تابع تمام قیمت‌های x شامل می‌باشد. در صورتی که تابع در آن قیمت‌ها تعریف شده باشد. یا قیمت تابع یک عدد حقیقی باشد.

مثال 1: ناحیهٔ تعریف (Domain) توابع ذیل را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{1}{x-3}\qquad h(x)=x^2-7x\qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x}\qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل

- تابع $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ در $x=3$ تعریف نیست؛ زیرا برای $x=3$ مخرج تابع صفر می شود.

یا برای $x=3$ قیمت تابع یک عدد حقیقی نمی‌باشد؛ پس:

$$\text{Dom} f=\{x\in \text{IR} / x\neq 3\}$$

- در تابع $g(x)=\sqrt{x}$ برای این‌که قیمت تابع یک عدد حقیقی (Real number)

باشد، باید $x \geq 0$ باشد؛ پس $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\text{dom g} = [0\ ,\ \infty)$ می‌باشد.

- درتابع $h(x) = x^2 - 7x$ چون برای هر قیمت x تابع $h(x)$ تعریف شده است.

پس: (ست تمام اعداد حقیقی) $\text{Dom h} = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- ناحیهٔ تعریف تابع $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ عبارت است از:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- درتابع $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ باید $3x + 12 \geq 0$ باشد، پس $x \geq -4$ می‌شود.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

ناحیهٔ تعریف توابع ذیل را دریابید:

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

مثال2: ناحیهٔ تعریف تابع $y = \sqrt{x - 3}$ را دریابید.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom y} = \{x \in IR /\ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

مثال3: ناحیهٔ تعریف توابع ذیل را دریابید.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad$ $\text{Dom f} = \{x /\quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad$ $dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

$$dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$$

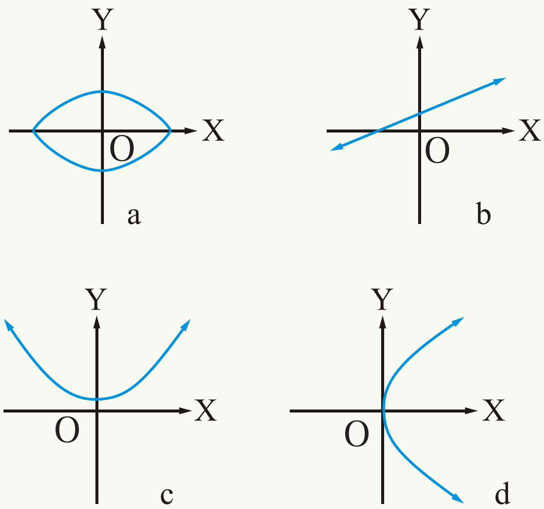
یا به شکل ست

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\text{Dom h} = \{x /\ x \leq -1$ یا $\ x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

گراف تابع وتشخیص تابع از روی گراف
(Graph of a function and vertical line test)

در اشکال داده شده، کدام‌یک از گراف‌ها، گراف یک تابع می‌باشد؟



فعالیت

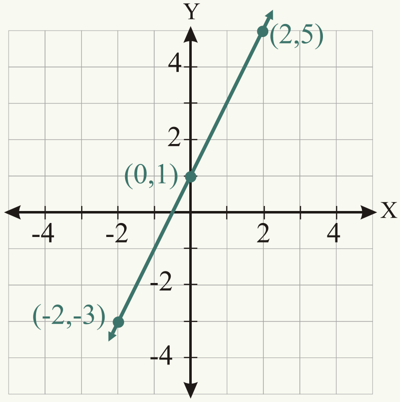
- یک خط موازی با محور Y را رسم کنید.
- مشاهده کنید این خط گراف تابع را در چند نقطه قطع می‌کند؟
- اگر این خط گراف را در یک نقطه قطع کند آیا این گراف، گراف یک تابع می‌باشد؟
- اگر این خط، گراف را اضافه‌تر از یک نقطه قطع کند آیا این گراف، گراف یک تابع می‌باشد؟

اگر $f(x)$ یک تابع حقیقی باشد، گراف تابع $f(x)$ عبارت از ست جوره‌های مرتب $(x, f(x))$ می‌باشد که در معادلهٔ $y = f(x)$ صدق کنند.

یا گراف یک تابع عبارت از ست نقاط در مستوی YOX می‌باشد؛ طوری که $\{(x, y) / y = f(x)\}$ که $x \in dom\, f(x)$ باشد.

مثال1: گراف تابع $y = f(x) = 2x + 1$ را رسم کنید.

input	تابع	output	جوره مرتب
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	(0,1)
2	$2(2)+1$	5	(2,5)
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



مثال2: گراف توابع $f(x) = x^2 + 1$ و $y = -1$ را رسم کنید ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های آن‌ها را نیز تعیین کنید.

حل

$f(x) = x^2 + 1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

با در نظرداشت جوره‌های مرتب:

$(-3,10)\ ,\ (-2\ ,\ 5)\ ,\ (-1\ ,2)\ ,\ (0,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,5)\ ,\ (3\ ,10)$

گراف توابع را رسم کنید.

$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

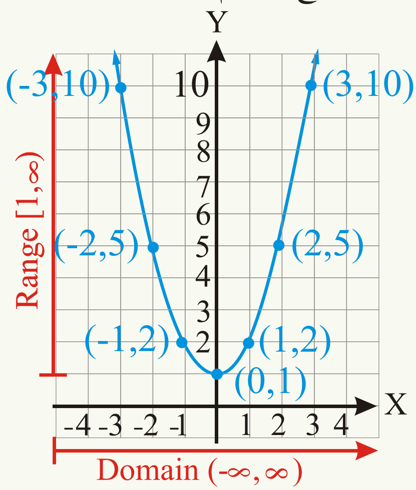
$f(1) = 1^2 + 1 = 2$

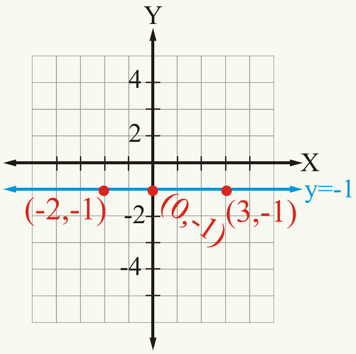
$f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$f(3) = 3^2 + 1 = 10$

$\text{Dom} f = (-\infty, \infty)$

$\text{Range} f = (1, \infty)$





Dom y = IR

Range y = −1

$f(x) = -1$

In put	Out put	جوره مرتب
x	$y = f(x)$	(x, y)
−2	−1	(−2, −1)
0	−1	(0 , −1)
3	−1	(3 , −1)

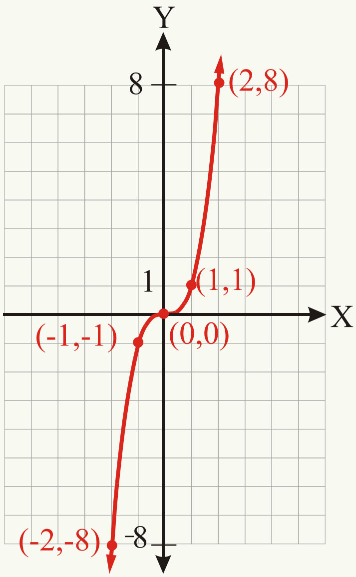
فعالیت

گراف تابع $f(x) = x^2 - 4$ را رسم کنید.

مثال3: گراف تابع $y = f(x) = x^3$ را رسم کنید.

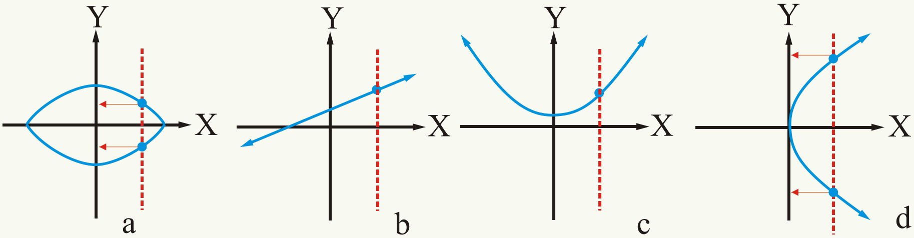
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	−1	−2
y = f(x)	8	1	0	−1	−8



اگر یک خط عمودی (موازی با محور y) یک گراف را محض در یک نقطه قطع کند این گراف، گراف یک تابع می‌باشد و اگر اضافه تر از یک نقطه قطع کند گراف، گراف یک تابع نمی‌باشد.

مثال4: در گراف‌های داده شدهٔ زیر مشاهده می‌شود که: b و c گراف‌های تابع می‌باشند؛ زیرا که خط عمودی، گراف‌ها را دریک نقطه قطع کرده است؛ اما a و d گراف‌های تابع نمی‌باشند، زیرا خط عمودی، گراف‌ها را در اضافه‌تر از یک نقطه (در دو نقطه) قطع کرده است یا برای یک x دو قیمت y یا f(x) وجود دارد. بنابرآن، گراف تابع نمی‌باشند.



درناحیهٔ تعریف (Domain) یک تابع اعدادی شامل می‌باشند که تابع در آن تعریف شده باشد. یا قیمت تابع یک عدد حقیقی باشد. گراف یک تابع در مستوی XOY ست نقاط S می‌باشد، طوری که $S=\{(x,y) \mid y=f(x)\}$ و x در ناحیهٔ تعریف تابع شامل باشد؛ اگر خط موازی با محور y گراف را محض دریک نقطه قطع کند گراف، گراف یک تابع می‌باشد.

تمرین

1 - ناحیه های تعریف (Domains) توابع ذیل را دریابید.

$h(x)=\sqrt{x^2-4}$ $g(x)=2x-5$ $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

$h(x)=\dfrac{3}{x-4}$ $g(x)=|x-3|$ $f(x)=\sqrt{x+1}$

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$ $g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$

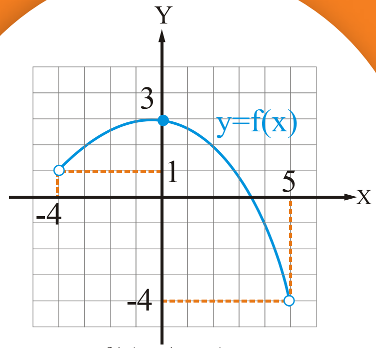
$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

2 - گراف‌های توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=-x^2$ را رسم کنید.

3 - گراف تابع $g(x)=2x-1$ را رسم کنید، اگر $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,\,1,\,2,\,3$ باشد.

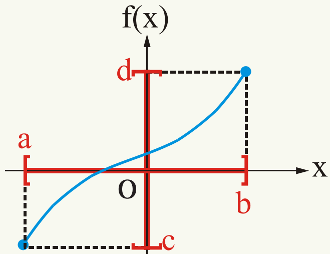
4 - گراف $x=y^2-2$ را رسم کنید. آیا این گراف، گراف یک تابع می‌باشد؟ چرا؟

تعیین ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های یک تابع از روی گراف یک تابع و یافتن قیمت های یک تابع

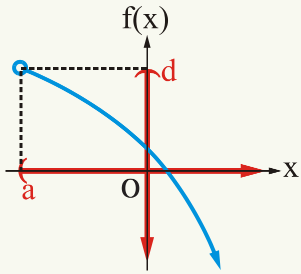


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آیا در گراف‌های توابع زیر ناحیهٔ تعریف (Domain) و ناحیه قیمت‌های (Range) توابع را تعیین کرده می‌توانید؟

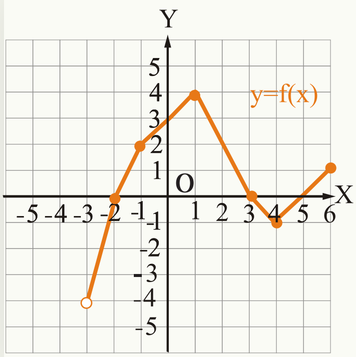


Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]



Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعالیت

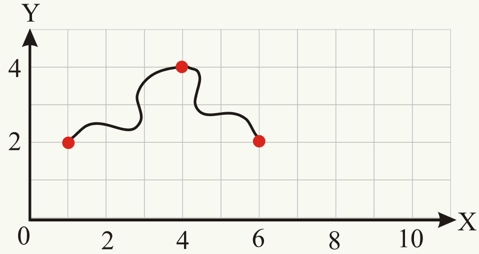


شکل را مشاهده کنید سؤال‌های زیر را جواب دهید.

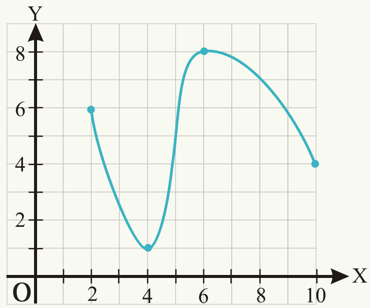
- از روی شکل، ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع f را دریابید.
- آیا عدد 4− در ناحیهٔ قیمت‌های تابع f شامل می باشد؟ چرا؟
- آیا 3− در ناحیهٔ تعریف f شامل است؟ چرا؟
- آیا عدد 6 در ناحیهٔ تعریف تابع f شامل می‌باشد؟

مشاهده می‌شود که $f(-1)=2$ و $f(1)=4$ می‌باشد و نیز از روی شکل ناحیهٔ تعریف تابع از (-3) الی 6 می‌باشد، اما $-3 \notin \text{dom } f$ و $6 \in \text{dom } f$، پس $\text{dom } f = (-3,6]$ می‌باشد به همین ترتیب ناحیهٔ قیمت‌های تابع (*Range*)، f از عدد 4- الی 4 می‌باشد، اما $-4 \notin \text{Range } f$، پس $\text{Range } f = (-4\ ,4]$ می‌باشد.

مثال 1: در اشکال داده شده، ساحهٔ تعریف و ساحهٔ قیمت‌های توابع را دریابید.



(1)



(2)

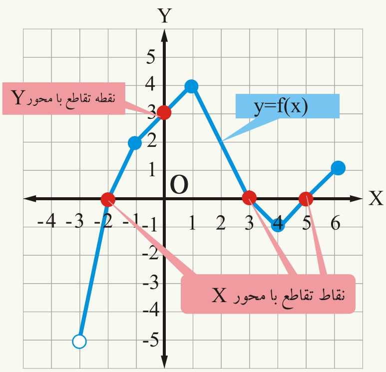
حل

در گراف شکل اول ناحیهٔ تعریف تمام اعداد حقیقی از 1 الی 6 می‌باشند. و ناحیهٔ قیمت‌ها تمام اعداد حقیقی بین 2 و 4 می‌باشند. یا $1 \le x \le 6$ □ $2 \le y \le 4$

در گراف شکل دوم: $2 \le x \le 10$ یا $\text{Dom} = [2\ ,10]$

$1 \le y \le 8$ یا $Range = [1\ ,8]$

مثال 2: شکل زیر را درنظر بگیرید:



- $f(-2)$, $f(3)$ و $f(5)$ را دریابید.
- کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع گراف با محور X و محور Y را دریابید.

حل: چون در نقطهٔ تقاطع گراف با محور X قیمت y صفر می‌شود.

$f(-2)=0$, $f(3)=0$ و $f(5)=0$ می‌باشد،

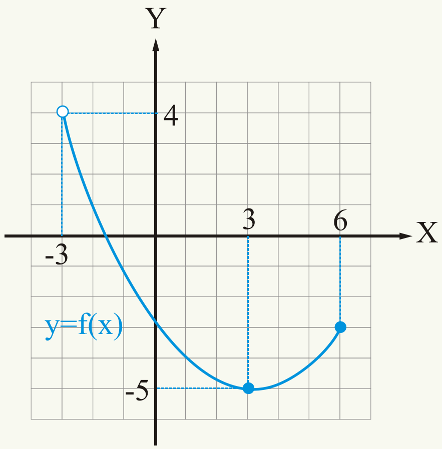
پس گراف محور x را در نقاط $(-2,\ 0)$, $(3,0)$

و $(5\,,0)$ قطع کرده است.

چون در نقطهٔ تقاطع گراف با محور y، قیمت x صفر می‌باشد $f(0)=3$ است.

پس گراف محور y را درنقطه $(0,3)$ قطع می‌کند.

مثال3: درشکل زیر domain و Range تابع f را دریابید. $f\ (3)$ و $f\ (6)$ را نیز دریابید.

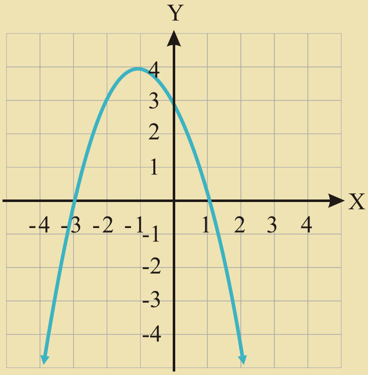


حل: مشاهده می‌شود که ناحیهٔ تعریف تابع از 3 – الی 6 می‌باشد؛ اما عدد 3 – در ناحیهٔ تعریف شامل نمی‌باشد. $(-3\,,6]$ یا $Domain\, f(x)=-3<x\leq 6$ می‌باشد.

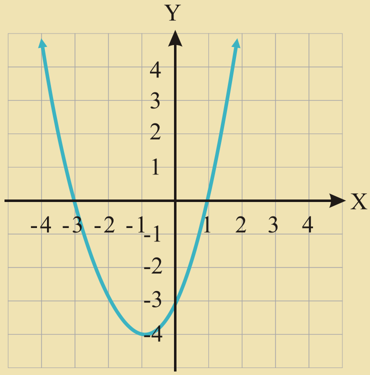
ناحیهٔ قیمت‌های تابع: $Range\, f(x)=-5\leq y<4$ یا $[-5\,,4)$ می‌باشد. $f(6)=-3$ و $f(3)=-5$ است.

تمرین

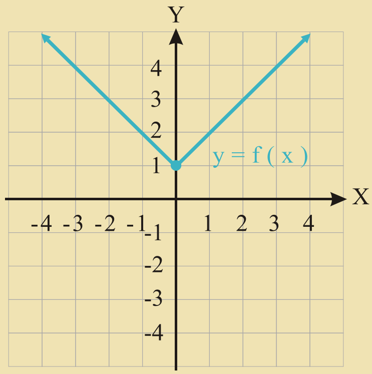
در اشکال داده شده:



2



1



3

$f(-1)=?$ $f(3)=?$

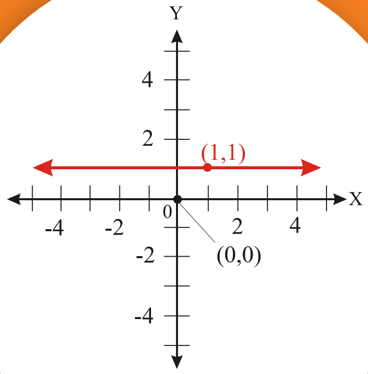
a) ناحیهٔ تعریف تابع

b) ناحیهٔ قیمت‌های تابع

c) نقاط تقاطع با محور X

d) نقاط تقاطع گراف با محور Y و در شکل سوم قیمت‌های خواسته شده تابع را دریابید.

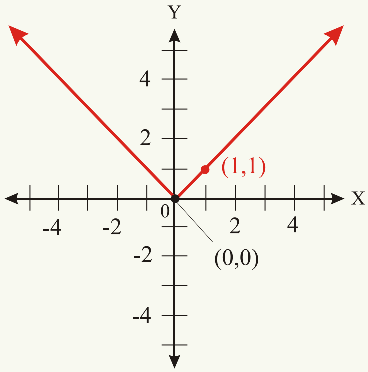
بعضی توابع خاص و گراف‌های آن



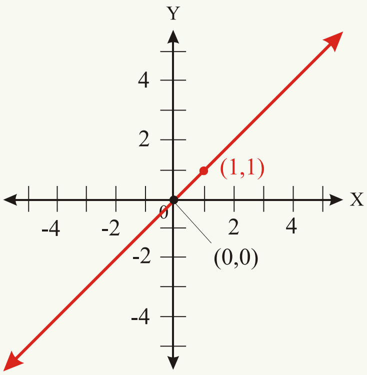
$f(x)=1$

توابعی که گراف‌های آن‌ها را در شکل مشاهده می‌کنید به چه نام‌ها یاد می‌شوند؟

توابع انواع زیادی دارند که بعضی از توابع خاص را تحت مطالعه می‌گیریم.
تابع ثابت، تابع عینیت، تابع قیمت مطلقه، تابع چندمعادله‌یی و تابع علامه



$f(x)=|x|$



$f(x)=x$

فعالیت

- تابع ثابت را چرا به نام تابع ثابت یاد می‌کنند؟
- آیا ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع عینیت باهم مساوی می‌باشند؟
- آیا ناحیهٔ قیمت‌های تابع قیمت مطلقه، قیمت‌های منفی را گرفته می‌تواند؟

تابع ثابت (Constant function)

اگر x و y ست‌های اعداد حقیقی باشند در تابع $f:x \to y$ یا $f(x)=y$ در صورتی که y مساوی به یک عدد ثابت (c) باشد یا $y=f(x)=C$ به نام تابع ثابت یاد می‌شود.

طور مثال: $f(x)=2$ ، $f(x)=-3$ ، $f(x)=-2$ وغیره توابع ثابت‌اند.

مثال 1: گراف توابع $f(x)=2$ و $f(x)=-2$ را ترسیم کنید.

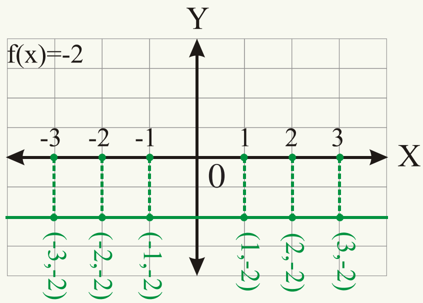
حل

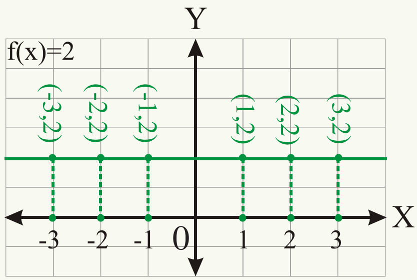
$f(x)=-2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

$f(x)=2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2





بدین معنی که تصویر هر عنصر ناحیهٔ تعریف تابع ثابت یک عدد ثابت می‌باشد.

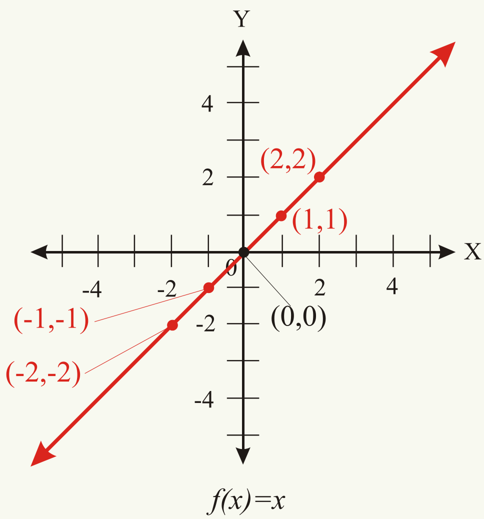
تابع عینیت (Identity function):

اگر تابع هر عنصر از ناحیهٔ تعریف به خودش ارتباط دهد یا $f(x)=x$ به نام تابع عینیت یاد می‌شود.

مثال: گراف تابع $f(x)=x$ را رسم کنید.

$f(x)=x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...



تابع قیمت مطلقه (Absolute value function)

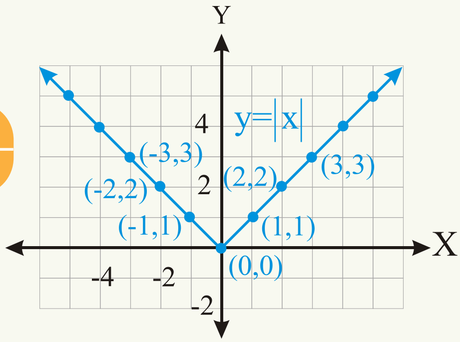
تابع قیمت مطلقه $f(x)=|x|$ طور ذیل تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

مثال: گراف تابع $f(x)=|x|$ را رسم کنید.

$f(x)=|x|$

$x=$	0	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)=$	0	1	2	3	1	2	3



مشاهده می‌شود که ناحیهٔ تعریف تابع قیمت مطلقه، ست تمام اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های تابع $[0,\infty)$ می‌باشند.

تابع چند معادله‌یی (Piecewise function) و گراف آن

آیا می‌شود که یک تابع درناحیهٔ تعریف توسط دو یاچند معادله مشخص شود؟

مثال1: اگر

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$$

باشد $f(-5)$, $f(8)$ و ناحیهٔ تعریف تابع f را دریابید.

حل: چون $-5<4$ می‌باشد، پس درمعادلهٔ اول وضع می‌شود داریم که:

$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$

چون عدد 8 بین 4 و 10 می‌باشد $4<8<10$، پس در معادلهٔ دوم وضع می‌شود، داریم که:

$f(8)=8^2-1=64-1=63$

ناحیهٔ تعریف f در معادلهٔ اول $(-\infty , 4)$ و درمعادلهٔ دوم $[4 , 10]$ می‌باشد.

پس ناحیهٔ تعریف تابع f عبارت از $(-\infty , 10]$ می‌باشد.

فعالیت

اگر:

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{11}{60}x+15 \;:\; 0\le x<60\\ \frac{1}{5}x-8 \;:\; 60\le x\le 90\end{cases}$$

باشد نشان دهید: که $g(80)=8$ و $g(30)=9.5$ می‌باشد.

گراف تابع چند معادله‌یی (Graph of function defined piecewise)

مثال 2: ناحیهٔ تعریف، ناحیهٔ قیمت‌های تابع $f(x)$ را دریابید و گراف آن را نیز رسم کنید.

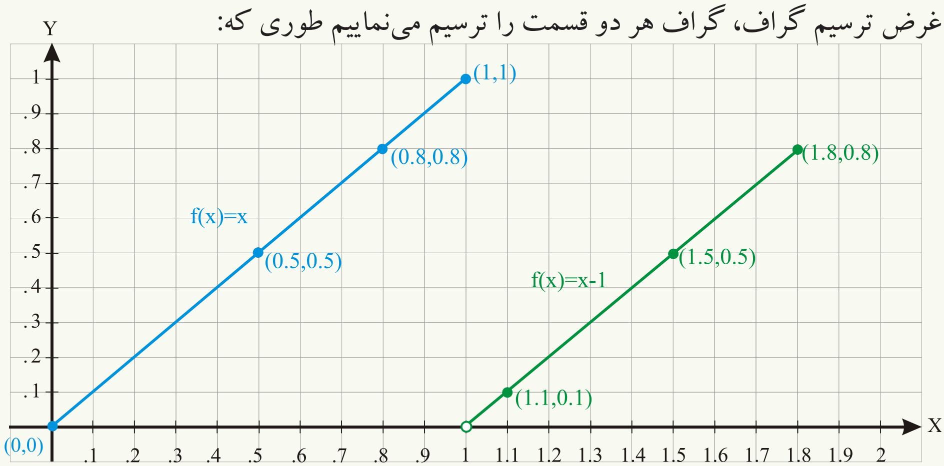
اگر:

$$f(x)=\begin{cases}x : 0\le x\le 1\\ x-1 : 1<x\le 2\end{cases}$$

حل: ناحیهٔ تعریف معادلهٔ اول $[0,1]$ و از معادلهٔ دوم $(1,2]$ می‌باشد

در نتیجه، ناحیهٔ تعریف $f(x)$ عبارت از $[0,2]$ می‌باشد.

غرض ترسیم گراف، گراف هر دو قسمت را ترسیم می‌نماییم طوری که:



$y=f(x)=x$				
x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y=f(x)=x-1$			
x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

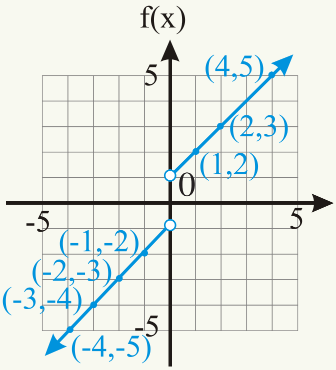
درنتیجه دو خط مستقیم به دست می‌آید که هر دو گراف تابع $f(x)$ می‌باشد.

فعالیت

$f(x)=\begin{cases} x & : \; 0\le x\le 4 \\ x-1 & : \; 0<x<-4 \end{cases}$ باشد $f(0),f(-2)\ ,\ f(2)$ را دریابید و گراف این تابع را نیز رسم کنید.

مثال 3: گراف تابع $f(x)=\begin{cases} x \;:\; \Leftarrow x<0 \\ x \;:1\Leftarrow x>0 \end{cases}$ را رسم، ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های تابع را تعیین کنید.

حل

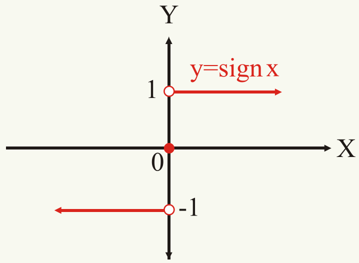


x	1	2	4	−1	−2	−3	−4
$f(x)$	2	3	5	−2	−3	−4	−5

مشاهده می‌شود که در ناحیهٔ تعریف تابع، صفر شامل نمی‌باشد. $(x\neq 0)$ یا $\text{Dom } f(x)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,\infty)$ و ناحیهٔ قیمت‌های تابع (Range) عبارت از $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ یا $y>1$ و $y<-1$

تابع علامه(sign function): که با sgn(x) نشان داده می‌شود یک مثال تابع چند معادله‌یی می‌باشد که طور ذیل تعریف شده است:

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$ ناحیهٔ تعریف این تابع ست تمام اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های (Range) آن $\{-1\,,\,0\,,1\}$ می‌باشد.



$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\,,\,0\,,1\}$

$f(x)=c$ تابع ثابت، $f(x)=x$ تابع عینیت و $f(x)=|x|$ تابع قیمت مطلقه می‌باشـد که ناحیهٔ تعریف آن اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های آن صفر و اعداد مثبت حقیقی می‌باشند.

تمرین

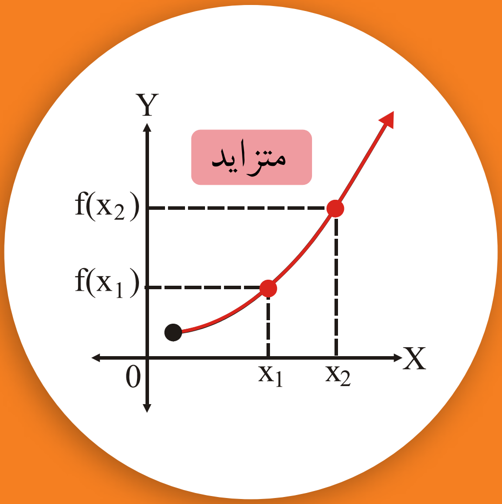
1 - گراف‌های توابع $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ و $h(x)=4$ را رسم کنید.

2 - گراف تابع $f(x)=|x|-3$ را رسم کنید.

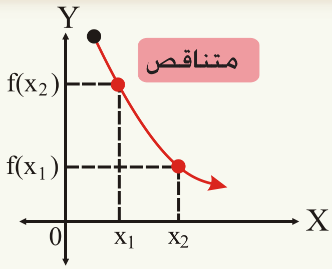
3 - اگر $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ \;\;x : x\ge 0\end{cases}$ باشد. $f(0)$ ، $f(-2,3)$ و $f(16)$ را دریابید.

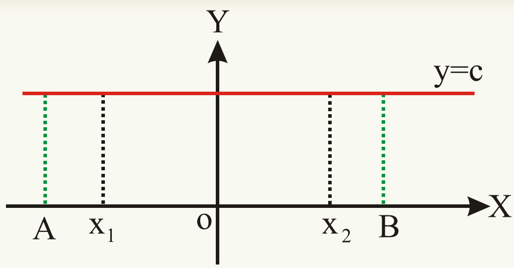
4 - اگر $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\le x<0\\ -x+1 : 0\le x\le 1\end{cases}$ باشد ساحهٔ تعریف $h(x)$ را تعیین کنید.

توابع متزاید و متناقص
(Increasing and decreasing functions)



• در گراف‌های داده شده کدام گراف، گراف تابع متزاید است؟
• کدام گراف، گراف تابع متناقص است؟
• کدام گراف نه متزاید و نه متناقص است؟





1 – یک تابع دریک انتروال متزاید است اگر $x_1 < x_2$ باشد، درنتیجه $f(x_1) < f(x_2)$ شود.

2 – یک تابع دریک انتروال متناقص می‌باشد، اگر $x_1 < x_2$ باشد، در نتیجه $f(x_1) > f(x_2)$ می‌شود.

3 – در یک تابع اگر $x_1 < x_2$ باشد در نتیجه $f(x_1) = f(x_2)$ شود، این تابع نه متناقص است و نه متزاید. طوری که در شکل واضح مشاهده می‌شود این تابع یک تابع ثابت می باشد.

مثال: گراف تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ در کدام انتروال‌ها متزاید و در کدام انتروال‌ها متناقص می‌باشد؟

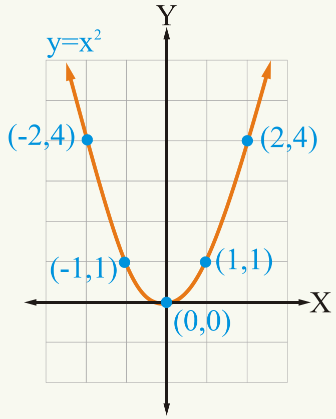
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

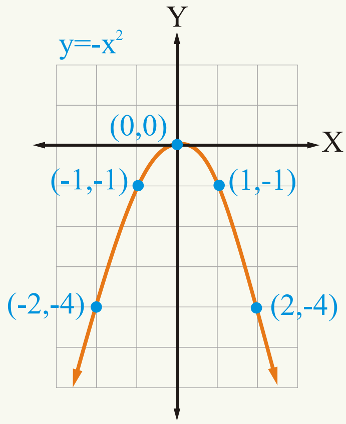
$1 < 4$



$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

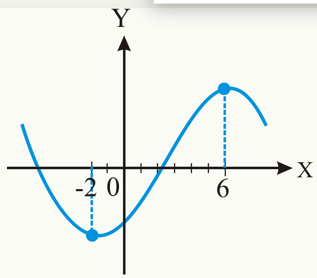
$-1 > -4$



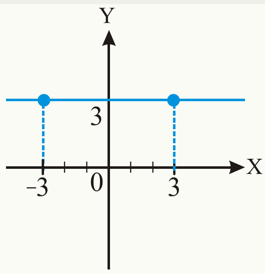
مشاهده می‌شود که تابع $f(x)=x^2$ در انتروال $(-\infty,0)$ متناقص و در انتروال $(0\ ,\ \infty)$ متزاید می‌باشد، اما تابع $f(x)=-x^2$ در انتروال $(-\infty,0)$ متزاید و در انتروال $(0,\infty)$ متناقص می‌باشد.

فعالیت

در اشکال داده شده در کدام انتروال گراف تابع متزاید و در کدام انتروال متناقص می‌باشد و کدام گراف نه متزاید و نه متناقص می‌باشد؟



(a)



(b)

توابع جفت و تاق(Even and odd functions)

1 – تابع $f(x)$ یک تابع جفت می‌باشد؛ اگر: $f(-x)=f(x)$ باشد بدین معنی اگر در تابع x را به $-x$ عوض کنیم درقیمت تابع تغییر وارد نمی‌شود.

2 – تابع $f(x)$ یک تابع تاق می‌باشد؛ اگر: $f(-x)=-f(x)$ باشد، یعنی اگر درتابع x را به $-x$ عوض‌کنیم قیمت تابع منفی می‌شود.

مثال1: در توابع $f(x)=x^2$ و $f(x)=x^3$ کدام تابع جفت و کدام تابع تاق می‌باشد؟

حل: در هر دو تابع x را $-x$ عوض می کنیم.

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

پس تابع $f(x)=x^3$ یک تابع تاق می‌باشد، زیرا $f(-x)=-f(x)$ می‌شود. مثل

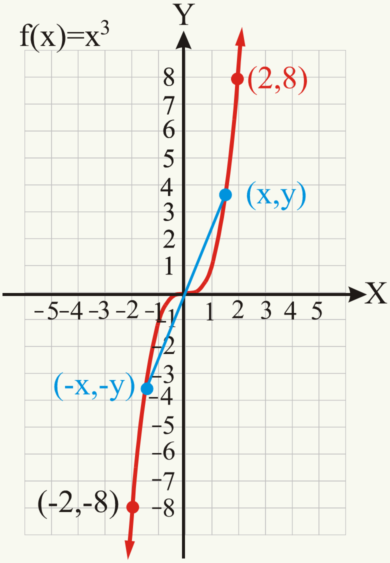
$f(-2)=-f(2)=-8$ و $f(x)=x^2$

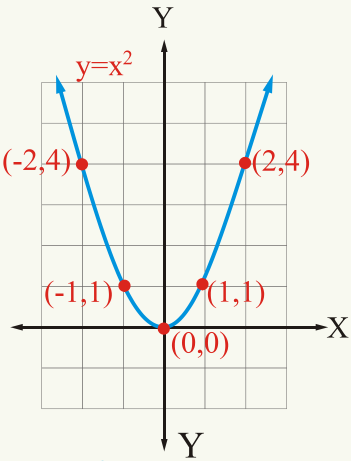
و در تابع $f(x)=x^2$ داریم که:

$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

پس تابع $f(x)=x^2$ یک تابع جفت می‌باشد، زیرا $f(-x)=f(x)$ است. $f(-2)=f(2)=4$

مشاهده می‌شود که گراف توابع جفت نظر به محور Y و گراف توابع تاق نظر به مبدأ کمیات وضعیه متناظر می‌باشند.



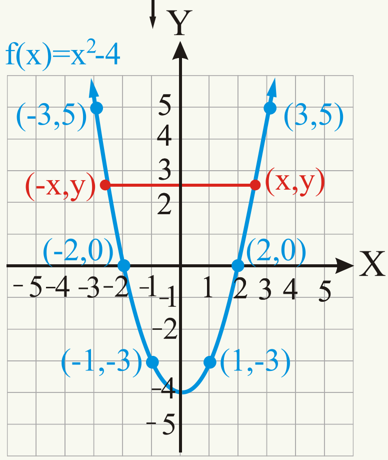


مثال2: در توابع $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=x^2+3x+2$ کدام یک جفت و کدام یک تابع تاق می‌باشد؟

حل: $f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$

پس این تابع جفت می‌باشد.

و درشکل نیز مشاهده می‌شود که در دو نقطه $(3,5)$ و $(-3,5)$ برای $x=3$ و $x=-3$ قیمت تابع باهم مساوی است که عبارت از عدد 5 می‌باشد، یعنی



$f(-3)=f(3)=5$ همچنین در $x=2$ و $x=-2$ قیمت تابع باهم مساوی است که صفر می‌باشد. در نتیجه تابع جفت می‌باشد.

$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$ که این تابع نه جفت است و نه تاق.

مثال3: اگر f از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی یک تابع تاق باشد. قیمت k رادریابید طوری که: $f(-2)=k+5$ و $f(2)=2k+3$ باشد.

حل: چون f یک تابع تاق می‌باشد.

$f(-x)=-f(x)$

$f(-2)=-f(2)$

$k+5=-(2k+3)$

$k+5=-2k-3$ (نظر به تعریف تابع تاق)

$3k=-8$

$k=-\frac{8}{3}$

اگر درتابع $f(x)$ ، $x_1<x_2$ باشد ونتیجه شود که $f(x_1)<f(x_2)$ است تابع متزاید و اگر $x_1<x_2$ باشد و درنتیجه $f(x_1)>f(x_2)$ شود تابع متناقص وهم اگر $f(-x)=f(x)$ باشد تابع $f(x)$ جفت و اگر $f(-x)=-f(x)$ شود تابع $f(x)$ تاق می‌باشد.

گراف توابع جفت نظر به محور Y و گراف توابع تاق نظر به مبداء کمیات وضعیه متناظر می باشند.

تمرین

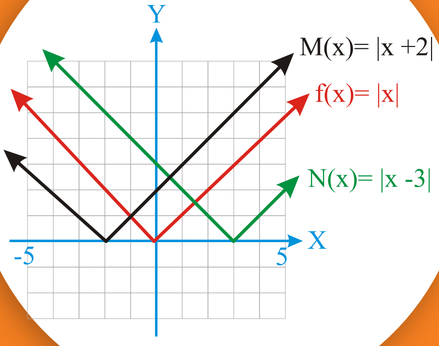
1 - کدام یک از توابع زیر متزاید، متناقص و کدام یک نه متزاید و نه متناقص می‌باشد؟

$f(x)=x^3+x$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=x^2-x^4$

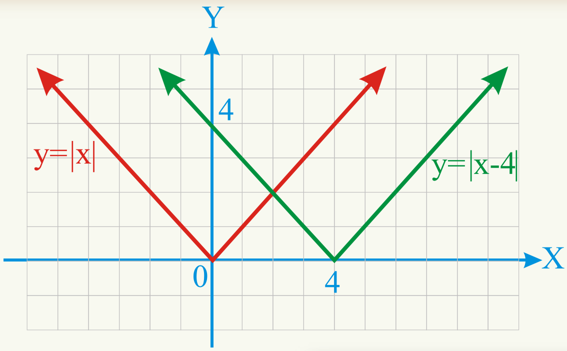
2 - کدام یک از توابع زیر داده شده، جفت و کدام یک تاق می‌باشد؟

$f(x)=x$, $f(x)=|x|$, $f(x)=x^4$, $f(x)=x^5$

انتقال (Translation) گراف‌ها



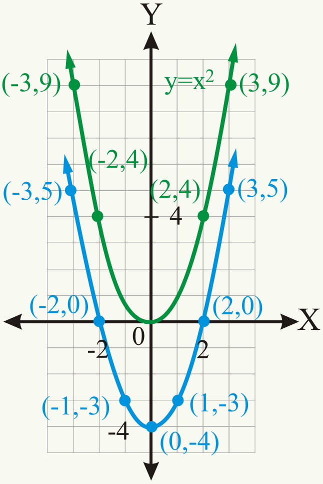
آیا می‌توانید بگویید که گراف‌های داده شده باهم چه رابطه دارند؟



فعالیت

- گراف تابع $f(x)=x^2$ را رسم کنید.
- گراف تابع $f(x)=x^2+4$ را رسم کنید.
- گراف تابع $f(x)=x^2-4$ را رسم کنید.
- بگویید که این گراف‌ها باهم چه رابطه دارند؟

اگر گراف $f(x)=x^2$ را رسم نماییم چطور می‌توانیم که از انتقال گراف $f(x)=x^2$ گراف تابع $f(x)=x^2-4$ را رسم نماییم. برای هر نقطهٔ (x,y) گراف $y=x^2$ نقطه مربوط $(x,y-4)$ بالای گراف $y=x^2-4$ قرار دارد، پس هر نقطهٔ گراف $y=x^2$ به اندازهٔ 4 واحد به طرف پایین انتقال می‌کند تا گراف $y=x^2-4$ به دست آید طوری که



درشکل مشاهده می‌شود. این انتقال به نام انتقال عمودی یاد می‌شود.

انتقال به 2 قسم است انتقال عمودی و انتقال افقی:

انتقال عمودی (Vertical Translation): انتقال عمودی یا به طرف بالا و یا به طرف پایین می‌باشد.

هرگاه $c>0$ باشد.

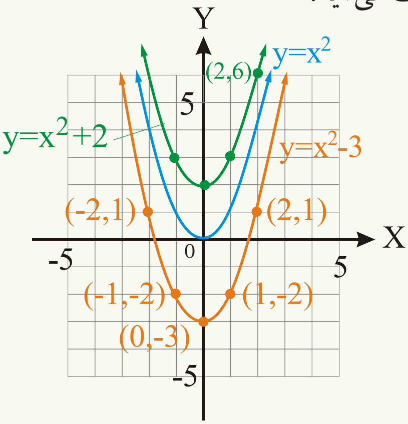
1: اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ عدد c به طرف بالا انتقال شده باشد. گراف $y=f(x)+c$ به دست می‌آید.

2: اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ عدد c به طرف پایین انتقال شده باشد گراف $y=f(x)-c$ به دست می‌آید.

مثال 1: گراف توابع $y=x^2+2$ و $y=x^2-3$ با گراف تابع $y=x^2$ چه رابطه دارد؟ هر سه گراف را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم نمایید.

حل: اگر گراف تابع $y=x^2$ را به اندازهٔ (2) واحد به طرف بالا انتقال دهیم گراف تابع $y=x^2+2$ به دست می‌آید و اگر گراف تابع $y=x^2$ را به اندازهٔ (3) واحد به طرف پایین انتقال دهیم گراف تابع $y=x^2-3$ به دست می‌آید.

x =	0	1	2	-1
$y=x^2$	0	1	4	1
$y=x^2+2$	2	3	6	3
$y=x^2-3$	-3	-2	1	-2



یا انتقال عمودی را این‌طور نیز می‌توان تعریف کرد:

اگر درگراف تابع به عوض y، $y-a$ وضع شود که a یک عدد ثابت می‌باشد، اگر a>0

باشد، گراف طور عمودی به اندازهٔ $|a|$ به طرف بالا انتقال می کند و اگر $a<0$ باشد به اندازه $|a|$ طور عمودی طرف پایین انتقال می کند.

مثال 2: از انتقال گراف $y=x^2$ گراف‌های توابع $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ $y=x^2+4$ و $y=x^2-4$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم وبا همدیگر مقایسه کنید.

$y=x^2$

x	y
0	0
±1	1
±2	4

$y=x^2+2$

x	y
0	2
±1	3
±2	6

$y=x^2+4$

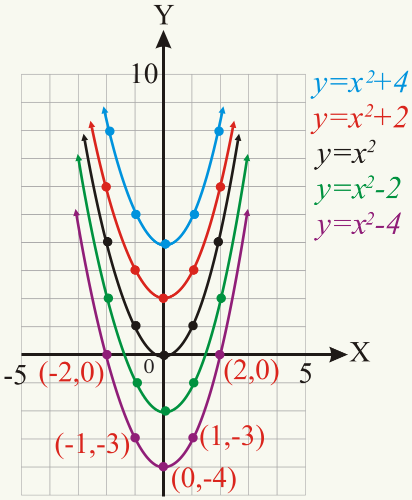
x	y
0	4
±1	5
±2	8

$y=x^2-2$

x	y
0	−2
±1	−1
±2	2

$y=x^2-4$

x	y
0	−4
±1	−3
±2	0



انتقال افقی: (Horizontal Translation)

اگر درگراف تابع به عوض x، $x-b$ وضع شود که b یک عدد ثابت است گراف تابع به اندازهٔ $|b|$ طور افقی انتقال می کند. اگر $b>0$ باشد گراف به طرف راست و اگر $b<0$ باشد گراف به طرف چپ انتقال می کند.

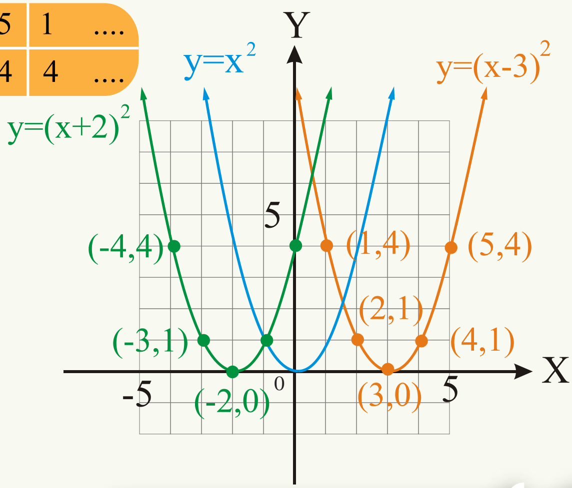
مثال 3: از انتقال گراف $y=x^2$ گرا ف توابع $y=(x+2)^2$ و $y=(x-3)^2$ را رسم کنید.

حل: طوری که درشکل مشاهده می‌شود ، اگر گراف تابع $y=x^2$ به اندازهٔ 2 واحد

به طرف چپ انتقال داده شود گراف $y=(x+2)^2$ به دست می‌آید. اگر گراف $y=x^2$ به اندازهٔ 3 واحد به طرف راست انتقال داده شود گراف تابع $y=(x-3)^2$ به دست می‌آید طوری که در شکل نیز مشاهده می‌شود.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعالیت

از انتقال گراف تابع $f(x)=|x|$ گراف توابع $g(x)=|x+2|$ و $h(x)=|x-3|$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم کنید.

ترکیب انتقال عمودی و افقی
(Combining Horizontal and Vertical shifts)

مثال4: گراف توابع $g(x)=(x+1)^2$ و $h(x)=(x+1)^2-3$ را رسم کنید.

حل: در اول گراف تابع $f(x)=x^2$ را رسم می‌نماییم که به نام گراف معیاری تابع درجه دوم یاد می‌شود. حال به روی گراف سه نقطه $(0,0)$, $(2,4)$ و $(-2,4)$ را مشخص می‌نماییم.

بعد گراف تابع $g(x)=(x+1)^2$ را رسم می‌نماییم، با ناحیهٔ تعریف تابع $f(x)=x^2$

عدد (1) را جمع می‌نماییم تا گراف $f(x)=x^2$ به اندازهٔ یک واحد به طرف چپ انتقال شود که درشکل دوم نشان داده شده است.

سپس، برای ترسیم گراف $f(x)=(x+1)^2-3$ گراف شکل دوم را به اندازهٔ 3 واحد به طور عمودی به طرف پایین انتقال می کند که گراف آن درشکل سوم نشان داده شده است.

$f(x)=x^2$

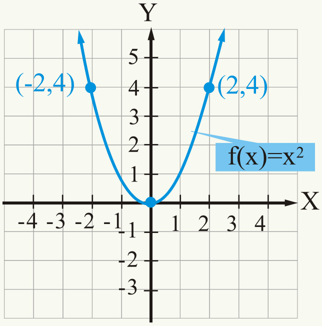
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

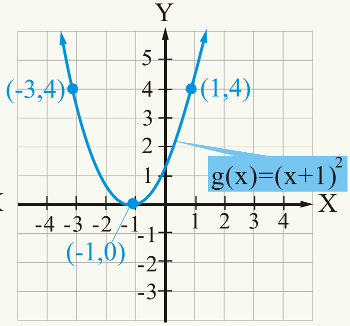
$g(x)=(x+1)^2$

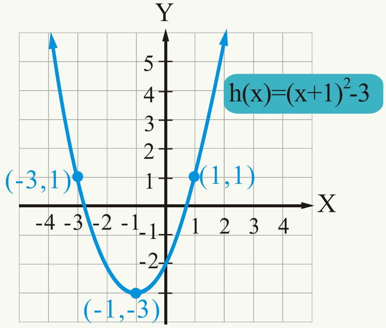
x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3

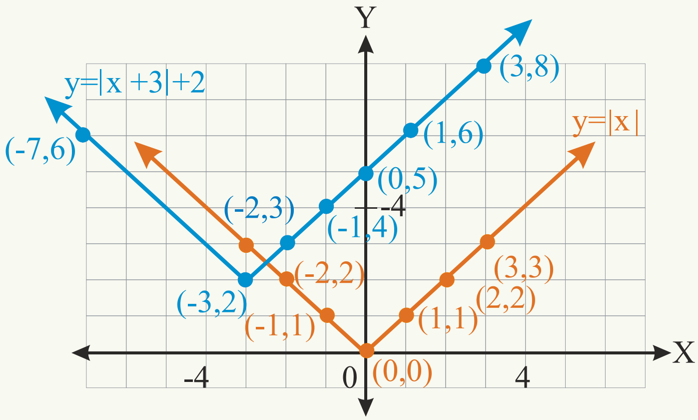






مثال5: از انتقال گراف تابع $y=|x|$ گراف تابع $y=|x+3|+2$ را رسم کنید.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



انتقال به (2) نوع می‌باشد (عمودی و افقی)

انتقال عمودی: هرگاه c یک عدد مثبت باشد.

1 - اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به شکل عمودی به طرف بالا انتقال شود گراف تابع $y=f(x)+c$ به دست می‌آید.

2 - اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به گونهٔ عمودی به طرف پایین انتقال شود. گراف تابع $y=f(x)-c$ به دست می‌آید.

انتقال افقی: هرگاه c یک عدد مثبت باشد.

1 - اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به طرف چپ انتقال داده شود گراف تابع $y=f(x+c)$ به دست می‌آید.

2 - اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به طرف راست انتقال شود گراف تابع $y=f(x-c)$ به دست می‌آید.

تمرین

1 - از انتقال گراف تابع $y=x^2$ گراف‌های توابع زیر را رسم کنید:

$g(x)=(x-2)^2$ $g(x)=x^2-1$ $g(x)=x^2-2$

2 - گراف تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید و از انتقال آن گراف‌های توابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $f(x)=\sqrt{x}+2$ را رسم کنید.

3 - گراف تابع $f(x)=|x|$ را رسم کنید و از انتقال این گراف، گراف‌های توابع $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ و $h(x)=|x-4|$ را رسم کنید.

4 - از انتقال گراف تابع $f(x)=x^3$، گراف‌های توابع $g(x)=x^3-3$ و $g(x)=(x-3)^3$ را رسم کنید.

عملیه‌های توابع

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

اگر $f(x)=x+2$ و $g(x)=2x+11$ باشد. $(f+g)(x)$ و $(f-g)(x)$ را دریافت کرده می‌توانید؟

عملیه‌های چهارگانهٔ توابع طور ذیل تعریف شده اند.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\ g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\mathrm{dom}\,(f+g)(x)=\mathrm{dom}\ f\ \bigcap\ \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(f-g)(x)=\mathrm{dom}\ f\ \bigcap\ \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(f\cdot g)(x)=\mathrm{dom}\ f\ \bigcap\ \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\mathrm{dom}\ f\ \bigcap\ \mathrm{dom}\,g\ -\ \{x\,/\,g(x)=0\}$$

مثال 1: اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=x^2-4$ باشد، $(f+g)(x)$ را دریابید و نیز ساحهٔ تعریف تابع $(f+g)(x)$ را تعیین کنید.

حل

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$\mathrm{dom}\ g=IR \quad \square \quad \mathrm{dom}\ f=IR$$
$$\mathrm{dom}(f+g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

مثال 2: اگر $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=4x+5$ باشد. $(f+g)(x)$ و $(f+g)(3)$ را دریابید.

حل

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

اگر $f(x)=3x^2+4x-1$ و $g(x)=2x+7$ باشد $(f+g)(x)$ و $(f+g)(4)$ رادریابید.

مثال3: اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x^2+x-2$ باشد.

$(f-g)(x)$، $(f\cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را دریابید و ناحیه‌های تعریف این توابع را نیز تعیین کنید.

حل

$$(f-g)x=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

$$\text{dom}(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)x=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

چون $\text{dom} f=IR$ و $\text{dom} g=IR$ می‌باشد.

$$\text{dom}(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})x=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ و } x\neq 1\}$$

فعالیت

اگر $f(x)=x-5$ و $g(x)=x^2-1$ باشند، $(\frac{f}{g})(x)$ $(f\cdot g)(x)\square$ $(f-g)(x)$ را دریابید.

مثال4: اگر $f(x)=x+3$ و $g(x)=x-1$ باشد.

$(f-g)(x)$، $(f\cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را دریابید.

حل

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$

چون در ناحیهٔ تابع $f(x)$ تمام اعداد حقیقی شامل می‌باشند (x هر عدد حقیقی را گرفته می‌تواند) یا $\mathrm{dom}\,f=\mathrm{IR}$ به همین ترتیب $\mathrm{dom}\,g=\mathrm{IR}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad x\neq 1$

$\mathrm{dom}(f-g)(x)=\mathrm{IR}\cap\mathrm{IR}=\mathrm{IR}$

$\mathrm{dom}(f\cdot g)(x)=\mathrm{IR}\cap\mathrm{IR}=\mathrm{IR}$

$\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x)=\mathrm{IR}-\{1\}$

یا $\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in\mathrm{IR}/x\neq 1\}$

یا $\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$

مثال5: اگر $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=\sqrt{3+x}$ باشد $f+g$ ، $f-g$ و $f\cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را دریابید و ناحیهٔ تعریف آن‌ها را تعیین کنید.

حل

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$

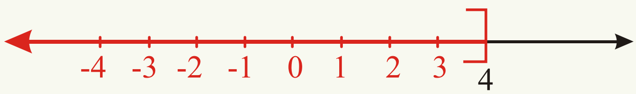
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$

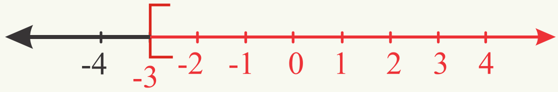
$=\sqrt{12+x-x^2}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$

$\mathrm{dom}\,f:\{4-x\geq 0\,,\,x\leq 4\}$ یا $(-\infty\,,\,4]$

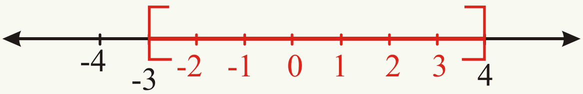


$dom\, g: \{x / 3+x \geq 0, x \geq -3\}$ یا $[-3, \infty)$

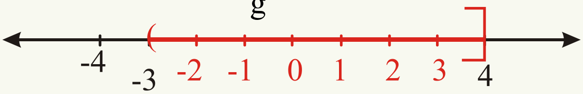


$(-\infty,4] \cap [-3,\infty) = [-3,4]$

که $[-3, 4]$ ناحیهٔ تعریف توابع $f+g$, $f-g$ و $f \cdot g$ می‌باشد.



$dom(\frac{f}{g})(x)$ چون $g(-3)=0$ می‌باشد، پس: $Dom \frac{f}{g} = (-3, 4]$ می‌باشد.



حاصل‌ضرب تابع با عدد ثابت

اگر c یک عدد ثابت و f یک تابع باشد، پس حاصل‌ضرب آن عبارت است از:

$$(c f)(x) = c \cdot f(x)$$

مثال6: اگر $f(x)=x^3-x+2$ و $c=5$ باشد.

$$(5 f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3-x+2) = 5x^3-5x+10$$

تمرین

توابع زیر را در نظر بگیرید:

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ را دریابید.

2 - ناحیهٔ تعریف آن‌ها را تعیین کنید.

$a: f(x)=2x+3 \quad g(x)=x-1 \qquad b: f(x)=x-5 \quad g(x)=3x^2$

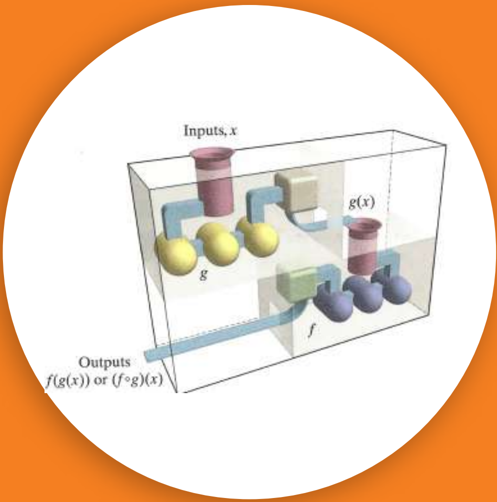
$c: f(x)=2x^2-x-3 \quad g(x)=x+1 \qquad d: f(x)=\sqrt{x} \quad g(x)=x-5$

$e: f(x)=\sqrt{x+4} \quad g(x)=\sqrt{x-1} \qquad f: f(x)=\sqrt{3x} \quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$

ترکیب توابع یا توابع مرکب

composition of functions

or composite functions



فعالیت

- اگر $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=x+3$ باشد. $(f\, o\, g)(x)$ و $(g\, o\, f)(x)$ را دریابید.
- در کدام حالت $(f\, o\, g)(x)=(g\, o\, f)(x)$ می‌باشد.
- $(f\, o\, f)(x)$ و $(g\, o\, g)(x)$ را دریابید.

اگر f و g توابع از x باشند، ترکیب f با g را به این شکل $(f\, o\, g)$ یا $f(g(x))$ نشان می‌دهند $(f\, o\, g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$ ناحیهٔ تعریف $(f\, o\, g)(x)$ عبارت از x است که در ناحیهٔ تعریف g و $g(x)$ درناحیهٔ تعریف f شامل باشد.

یا ناحیهٔ تعریف $(f\, o\, g)$: $Dom\,(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in dom\,g\,,g(x)\in dom\,f\}$

1- x در ناحیهٔ تعریف g شامل باشد

2- طوری که $g(x)$ درناحیهٔ تعریف f شامل باشد.

درشکل فوق تابع $(f\, o\, g)(x)$ توسط دو ماشین نشان داده شده است. در ماشین اول ورودی (input)، x و (out put) عبارت از g(x) می‌باشد. در ماشین دوم(input) عبارت از g(x) می‌باشد و (Out put) عبارت از $(fog)(x)$ می‌باشد. اگر $g(x)$ در ناحیهٔ تعریف f شامل نباشد، پس در ماشین دوم(f) داخل شده نمی‌تواند.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

مثال1: اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=3x$ باشد. $(f o g)(x)$ و $(g o f)(x)$ را دریابید.

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

مشاهده می‌شود که:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

مثال2: اگر $f(x)=3x-4$ و $g(x)=x^2+6$ باشد $(f o g)(x)$ و $(g o f)(x)$ را دریابید.

حل: درحقیقت در $(fog)(x)$ تابع $g(x)$ عوض (Domain) یا x در تابع f وضع می شود.

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

واضح است که ناحیهٔ تعریف $(f o g)(x)$ و $(g o f)(x)$ ست تمام اعداد حقیقی می‌باشند.

فعالیت

اگر $f(x)=x+6$ و $g(x)=x-6$ باشد نشان دهید که $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ می‌باشد.

مثال3: اگر $g(x)=1-x$ و $f(x)=\sqrt{x}$ باشد.

در قدم اول ناحیهٔ تعریف توابع $f o g$ و $g o f$ را دریابید. بعد $f o g$ و gof را به دست آورید.

حل: ناحیهٔ تعریف f عبارت از: $[0,\infty)$ و ناحیهٔ تعریف تابع g ست تمام اعداد حقیقی $(-\infty,\infty)$ می‌باشد.

یا: $Domf=[0,\infty)$ $\qquad$ $Domg=(-\infty,\infty)$

یا: $Dom(fog)=\{x/x\in domg\ ,\ g(x)\in domf\}$

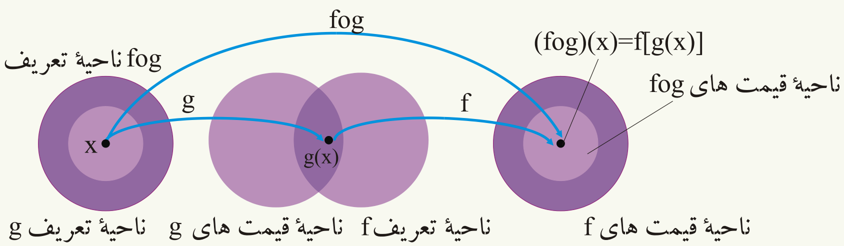
$\text{Dom}(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$

$\text{Dom}\ (g\circ f)=\{x/x\in \text{dom}\,f\,,f(x)\in \text{dom}\,g\}=\{x/x\geq 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$

$(f\circ g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$

$(g\circ f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$

برای وضاحت بهتر ناحیهٔ تعریف تابع مرکب شکل زیر را مشاهده کنید:



مثال4: اگر $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ باشد: به دو طریق نشان دهید که تابع $h(x)$ از ترکیب کدام دوتابع به دست آمده است؟

حل: تابع $h(x)$ را می‌توان به شکل ترکیب دو تابع $(g\circ f)(x)$ و $(Jok)(x)$ نوشت.

طوری که: $f(x)=3x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد.

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$

به همین ترتیب تابع $h(x)$ را می‌توان به شکل ترکیب دو تابع $(jok)(x)$ بنویسیم.

طوری که: $j(x)=\sqrt{x+1}$ و $k(x)=3x^2$ باشد

$(j\circ k)(x)=j(k(x))=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$

مثال5: اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$, $(x\neq -2)$ باشد.

$f(f(x))$, $(f\circ f)(2)$ $\square$ $(f\circ f\circ f)(x)$ را دریابید.

حل

$$(f\circ f)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

$(f\,o\,f)(2)=?\qquad (f\;o\;f)\;(x)=\dfrac{x}{3x+4}\;\Rightarrow (f\;o\;f)(2)=\dfrac{2}{3\cdot 2+4}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$

$(f\,o\,f\,o\,f)(x)=$

$$=\dfrac{\dfrac{x}{x+2}}{3(\dfrac{x}{x+2})+4}=\dfrac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x}{x+2}+4}=\dfrac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x+4x+8}{x+2}}=\dfrac{x}{x+2}\cdot\dfrac{x+2}{7x+8}=\dfrac{x}{7x+8}$$

فعالیت

اگر $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=x+3$ باشد $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$،

$(g\,o\,f)(-2)\square(f\;o\;g)(3)$ را دریابید.

تمرین

1- اگر $f(x)=-3x+2$ و $g(x)=x^3$ باشد:

$(\dfrac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$

را دریابید و نیز ناحیهٔ تعریف آن‌ها را تعیین کنید.

2- اگر $f(x)=x^2-3$ و $g(x)=\sqrt{x-3}$ باشد $(f\cdot g)(x)$ ، $(\dfrac{f}{g})(x)$ و $(\dfrac{g}{f})(x)$ را معلوم کنید.

3 - اگر $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ و $k(x)=\sqrt{3x+4}$ باشد ناحیه‌های تعریف توابع $(f\cdot g)(x)$ ، $(\dfrac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ و $(\dfrac{h}{k})(x)$ را دریابید.

4- اگر $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=x^2$ باشد $(g\,o\,f)(3)$ و $(f\,o\,g)(1)$ را دریابید.

5- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ باشد $f\,o\,g$, $g\,o\,f\,\square\, f\,o\,f$ را دریابید.

6 - اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ ، $g(x)=x^{10}$ و $h(x)=x+3$ باشد $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ را دریابید.

تابع معکوس
(Inverse Function)



فعالیت

- درشکل بین دو تابع کدام رابطه وجود دارد؟
- آیا معکوس هر تابع، یک تابع می‌باشد؟
- اگر معکوس یک تابع نیز یک تابع باشد. این گونه تابع را به کدام نام یاد می‌کنند؟
- اگر $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ و $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ باشد، آیا تابع g معکوس تابع f می‌باشد یاخیر؟ چرا؟
- اگر $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ باشد، آیا تابع g معکوس تابع f می‌باشد؟

در تصویر فوق یک ترمامیتر را مشاهده می کنید و می‌دانیم که بین درجه‌های حرارت سانتی گرید و فارنهایت رابطه $f=\frac{9}{5}c+32$ وجود دارد اگر این معادله برای (c) حل شود داریم که:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

تابع c تابع معکوس تابع f می‌باشد. معکوس یک رابطه (x,y) عبارت از: (y,x) می‌باشد که ناحیهٔ تعریف تابع معکوس عبارت از ناحیهٔ قیمت‌های تابع و ناحیهٔ قیمت‌های یک تابع معکوس عبارت از ناحیهٔ تعریف تابع می‌باشد.

$Range\ f^{-1} = dom\ f$ و $\text{domain } f^{-1} = \text{Range } f$ معکوس تابع f به f^{-1} نشان داده می‌شود. متوجه باشید که: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)})$

مثال1: اگر تابع $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ باشد.

پس $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ می‌باشد:

$$f^{-1}(7) = 3 \qquad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(5) = 1 \qquad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \qquad f(8) = -10$$

می‌باشد؛ پس $f^{-1}(x)$ نیز یک تابع می‌باشد، اما اگر $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ باشد؛ $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ می‌باشد.

مشاهده می‌شود که $f^{-1}(x)$ یک تابع نیست، زیرا که برای $x = 2$ دو تصویر مختلف در (Range) وجود دارد. $f(2) = 3$ و $f(2) = 1$ می‌باشد؛ پس معکوس هر تابع، تابع نمی‌باشد یا به عبارت دیگر، هر تابع معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

هر گاه در یک تابع که به شکل جوره‌های مرتب داده شده باشد جاهای عناصر اولی و دومی باهمدیگر عوض شود رابطه‌یی که به دست می‌آید عبارت از معکوس تابع اولی می‌باشد، تابعی که معکوس آن نیز یک تابع باشد گفته می‌شود که تابع معکوس‌پذیر است.

مثال2: آیا توابع f و g که طور زیر به شکل جوره‌های مرتب داده شده‌اند. معکوس‌پذیر می‌باشند؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: اگر جاهای عناصر اولی و دومی جوره‌های مرتب را باهمدیگر تبدیل نماییم داریم که:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

مشاهده می‌شود که f^{-1} یا معکوس تابع f نیز یک تابع می‌باشد، زیرا که عناصر اولی جوره‌های مرتب f^{-1} تکرار نشده‌اند و $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

مشاهده می‌شود که g^{-1} یا معکوس تابع g، تابع نیست؛ زیرا که برای $x = 1$ دو قیمت 3 و 5 وجود دارد، پس تابع g معکوس‌پذیر نیست.

خلاصه این که چون f تابع یک به یک بوده، درنتیجه معکوس‌پذیر است. و چون تابع g یک به یک نبوده معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

نتیجه: تنها معکوس تابع یک به یک ، یک تابع می‌باشد.

تابع یک به یک(one – to – one function)

یک تابع $f(x)$ تابع یک به یک می‌باشد، اگر $x_1 \neq x_2$ باشد درنتیجه $f(x_1) \neq f(x_2)$ شود.

یا: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

و اگر: $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

اگر یک تابع، تابع یک به یک باشد در آن صورت معکوس آن نیز یک تابع می‌باشد.

مثال3: اگر $f(x) = -4x + 12$ و $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ باشد نشان دهید که کدام یک از این توابع، تابع یک به یک می‌باشد.

حل: اگر $a \neq b$ باشد. $-4a + 12 \neq -4b + 12$ می‌باشد.

پس تابع $f(x)$ تابع یک به یک می‌باشد.

طور مثال: اگر $x = 2$ باشد: $f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$

اگر $x = 3$ باشد

$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$

پس تابع $f(x)$ تابع یک به یک می‌باشد. و در $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$

اگر $x = 3$ باشد. $g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

اگر $x = -3$ باشد. $g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$f(3) = f(-3)$ اما $3 \neq -3$

پس تابع $g(x)$ تابع یک به یک نمی‌باشد.

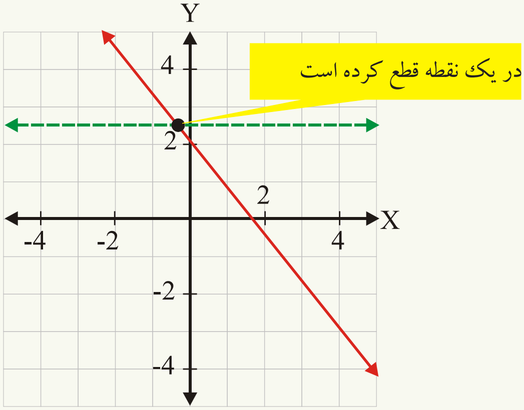
فعالیت

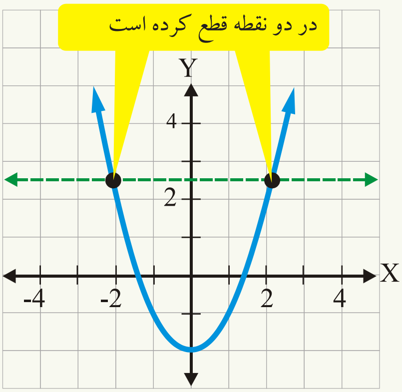
اگر $f(x) = 3x + 8$ و $g(x) = x^2$ باشد نشان دهید که کدام‌یک از توابع، تابع یک به یک می‌باشد و کدام‌یک از آن‌ها تابع یک به یک نیست؟ چرا؟

تشخیص تابع یک به یک از روی گراف

اگر خط افقی موازی با محور x گراف تابع را دریک نقطه قطع کند این تابع، تابع یک به یک است و اگر خط افقی گراف تابع را در اضافه‌تر از یک نقطه قطع کند این گراف، گراف تابع یک به یک نیست.

مثال4: در اشکال داده شده مشاهده می‌شود که خط موازی با محور x گراف تابع اولی را دریک نقطه و گراف تابع دومی را در دو نقطه قطع کرده است؛ پس تابع اولی، تابع یک به یک بوده، اما تابع دومی تابع یک به یک نمی‌باشد.





تعریف تابع معکوس: اگر f یک تابع یک به یک باشد که ناحیهٔ تعریف آن x و ناحیهٔ قیمت‌های آن y باشد، پس تابع g درصورتی معکوس تابع f می‌باشد که ناحیهٔ تعریف g، y باشد و ناحیهٔ قیمت‌های آن x باشد ویا یک تابع g درصورتی معکوس تابع f می‌باشد که اگر:

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

مثال5: اگر $f(x) = 3x + 2$ باشد معکوس تابع $f(x)$ یا $f^{-1}(x)$ را دریابید.

حل

$$y = f(x) = 3x + 2$$

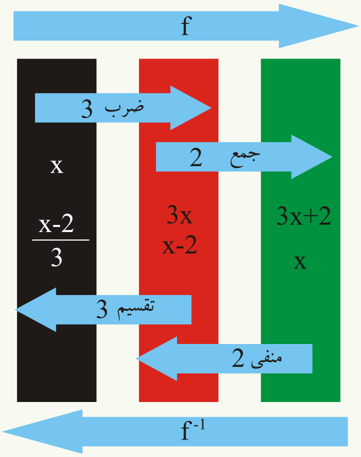
$$x = 3y + 2$$

$$3y = x - 2$$

$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$



این مثال به طور خلاصه در شکل نیز نشان داده شده است.

و از طرف دیگر، اگر $f^{-1}(x)$ را به $g(x)=\frac{x-2}{3}$ نشان دهیم

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$ می‌باشد. زیرا که:

$$(f\circ g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\circ f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا $f^{-1}(f(x))=x$ و $f(f^{-1}(x))=x$

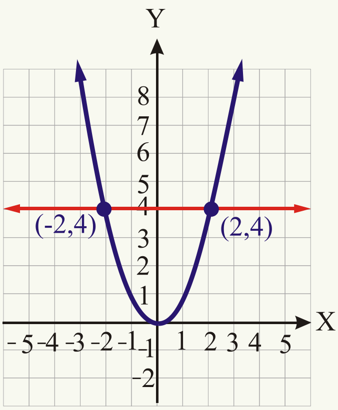
مثال6: اگر $f(x)=x^3+1$ باشد $f^{-1}(x)$ و اگر $g(x)=x^2$ باشد $g^{-1}(x)$ را دریابید.

حل

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

اگر y را به $f^{-1}(x)$ نشان دهیم؛ پس:



$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

$$y=\pm\sqrt{x} \text{ یا } g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$

مشاهده می‌شود که $g^{-1}(x)$ یک تابع نمی‌باشد، زیرا اگر $x=2$ ویا $x=-2$ باشد $g(-2)=4$ و $g(2)=4$ می‌شود شکل را مشاهده کنید، پس $g(x)$ یک تابع معکوس پذیر نمی‌باشد.

مثال 7: برای کدام قیمت x تابع $f(x)=5x-2$ با تابع معکوس خود مساوی می‌شود؟

حل: اگر $y=5x-2$ باشد معکوس آن $x=5y-2 \Rightarrow 5y=x+2$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow 24x=12 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

به قیمت $x=\frac{1}{2}$ تابع $f(x)$ با تابع معکوس خود مساوی می‌شود.

مثال 8: نشان دهید که توابع $f(x)=7x-2$ و $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ معکوس یکدیگر اند.

حل

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

پس $f(x)$ و $g(x)$ معکوس یکدیگر اند از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که ترکیب تابع و تابع معکوس آن تابع عینیت $\left(f(x)=x\right)$ می‌باشد.

فعالیت

اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ باشد $f^{-1}(x)$ را دریابید و نیز نشان دهید $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ می‌باشد.

گراف تابع و گراف تابع معکوس آن

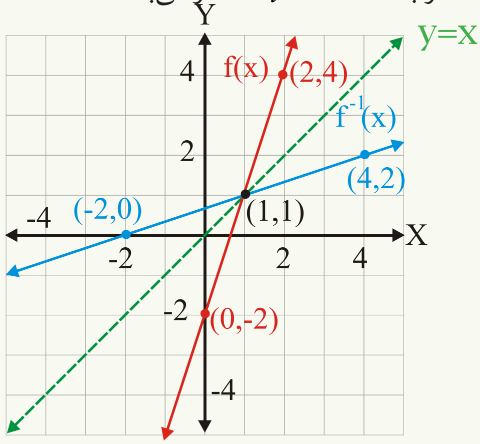
در بین گراف تابع یک به یک $f(x)$ و گراف تابع معکوس آن $(f^{-1}(x))$ یک رابطه

وجود دارد، زیرا اگر (a,b) یک نقطه بالای گراف $f(x)$ باشد (b,a) یک نقطه بالای گراف تابع $f^{-1}(x)$ می‌باشد. که نقاط (a,b) و (b,a) نظر به خط $y=x$ متناظر می‌باشند.

مثال 9: اگر $f(x)=3x-2$ باشد واضح است که $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ تابع معکوس f می‌باشد. گراف هر دو تابع را درعین سیستم کمیات وضعیه رسم نمایید و مقایسه کنید که گراف‌ها نظر به خط $y=x$ متناظر می‌باشند.

x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

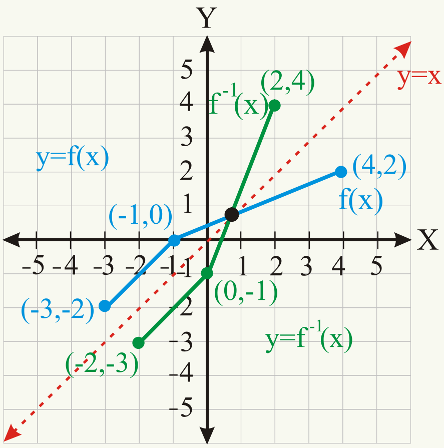
x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



مشاهده می‌شود که گراف هر دو تابع نظر به خط مستقیم $y=x$ متناظر می‌باشند.

مثال 10: اگر $f(x)$ دارای جوره‌های مرتب $(-3,-2),(-1,0)$ و $(4,2)$ باشد، گراف $f^{-1}(x)$ و $f(x)$ را درعین سیستم کمیات وضعیه رسم کنید و نشان دهید که هر دو گراف نظر به خط $y=x$ متناظر می‌باشند.

مشاهده می‌شود که گراف‌های f(x) و $f^{-1}(x)$ نظر به خط y=x متناظر می‌باشند.



- معکوس تابع یک به یک نیز یک تابع می‌باشد.
- خط موازی با محور x (خط افقی) گراف تابع یک به یک را دریک نقطه قطع می کند.
- برای دریافت معکوس $y=f(x)$ معادلهٔ تابع را برای x حل می‌نماییم، بعد x را به y و y را به x تبدیل می کنیم. تابع به دست آمده $y=f^{-1}(x)$ تابع معکوس $f(x)$ می‌باشد.
- گراف تابع $f(x)$ و گراف تابع معکوس $f(x)$ نظر به خط $y=x$ متناظر می‌باشد.

$dom\,f(x)=Range\,f^{-1}(x)$ و $Range\,f(x)=dom\,f^{-1}(x)$ می‌باشد.

تمرین

1 – معکوس توابع زیر را دریابید و بگویید که معکوس کدام تابع نیز یک تابع می‌باشد؟

$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$ $\quad h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$

$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ $\quad k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$

2 – معکوس هر یک از توابع ذیل را دریابید وصحت جواب خود را با $f(f^{-1}(x))=x$ امتحان کنید.

$f(x)=x+3$ $\qquad f(x)=2x$ $\qquad f(x)=2x+3$

$f(x)=x^3+2$ $\qquad f(x)=(x+2)^3$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x}$

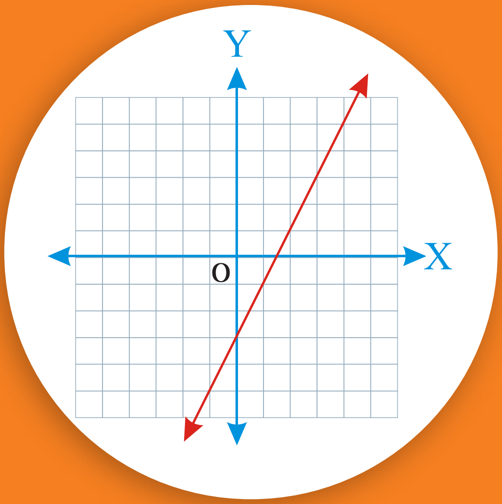
3 – گراف‌های توابع ذیل را رسم کنید وتوسط خط موازی با محور x (خط افقی) نشان دهید که معکوس آن نیز یک تابع می‌باشد.

$f(x)=1-x^2$ $\qquad g(x)=\frac{7-2x}{5}$

4 – کدام یک از توابع ذیل تابع یک به یک می‌باشد؟

$y=4x-5$ $\qquad y=6-x$ $\qquad y=(x-2)^2$ $\qquad y=9$ $\qquad y=\frac{1}{x+2}$

توابع پولینومی



• آیا می‌دانید که تابع درجه یک را چرا تابع خطی می گویند؟

• آیا گراف تابع درجه یک، یک خط مستقیم می‌باشد؟

پولینوم‌ها را در فصل اول مطالعه کرده‌اید. پولینومی که از یک حرف (متحول) تشکیل شده باشد به نام تابع پولینومی یاد می‌شود.

تابع خطی (Linear function) یا تابع درجه یک

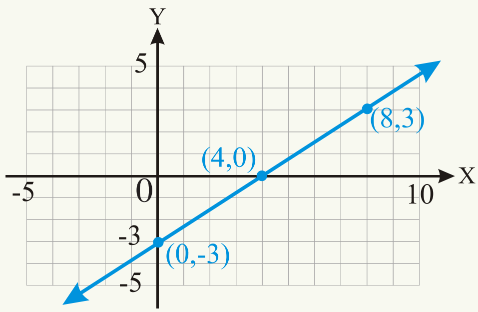
تابع پولینومی است که درجهٔ آن یک باشد.

شکل عمومی تابع درجه یک (تابع خطی) $f(x) = ax + b$ می‌باشد که $a \neq 0$ و a , b اعداد حقیقی باشند.

به طور مثال: $f(x) = 3x + 4$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 2x$ و $f(x) = \frac{1}{2}x$ توابع خطی اند.

مثال 1: گراف تابع $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$ را رسم کنید ونقاط تقاطع گراف را با محورهای X و Y دریابید.

نقطهٔ تقاطع گراف با محور X عبارت از $(4,0)$ و با محور Y نقطه $(0,-3)$ می‌باشد. مشاهده می‌شود که گراف تابع درجه یک، یک خط مستقیم می‌باشد از این سبب تابع، درجه یک را به نام تابع خطی نیز یاد می کنند. برای ترسیم گراف تابع خطی کافی است که نقاط تقاطع گراف را با محورهای X و Y به‌دست آوریم و خط مستقیم را رسم نماییم، طوری که در شکل مشاهده می‌شود.



$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3

فعالیت

گراف تابع $y=f(x)=x+1$ و $y=x-1$ را رسم کنید وکمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع گراف با محورهای X و Y را دریابید.

مثال2: گراف تابع خطی $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ را رسم کنید.

حل: در نقطهٔ تقاطع گراف با محور Y قیمت x صفر می‌باشد (x = 0)

پس:

$$f(0)=\frac{2}{3}(0)+2=2$$

نقطهٔ تقاطع گراف با محور Y عبارت از $(0,2)$ می‌باشد.

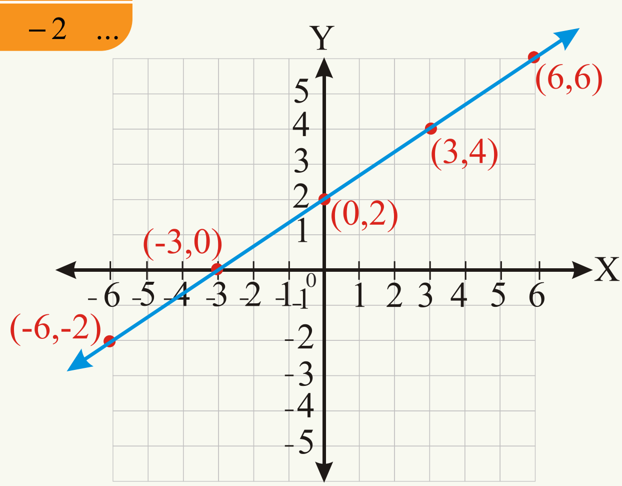
و درنقطهٔ تقاطع گراف با محور X قیمت y یا f(x) صفر می‌باشد $(f(x)=0)$ درنتیجه:

$$0=\frac{2}{3}x+2\Rightarrow x=-3$$

پس نقطهٔ تقاطع گراف با محور X عبارت از $(-3,0)$ می‌باشد.

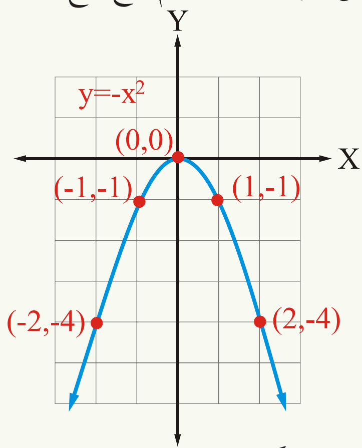
با وصل کردن دو نقطه $(0\,,2)$ و $(-3\,,0)$ می‌توانیم خط مستقیم را رسم نماییم وهم می‌توانیم چند نقطهٔ دیگر گراف تابع را دریابیم که بالای همین خط مستقیم قرار دارند.

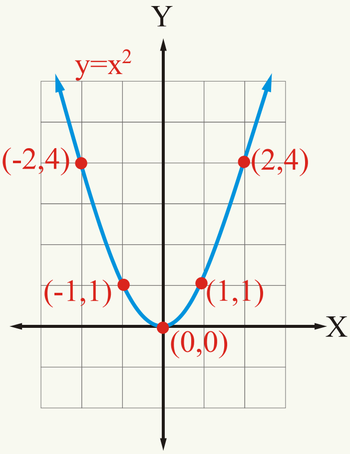
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...



تابع درجه دوم (Quadratic Function) و گراف آن

- این گراف‌ها از کدام نوع تابع اند؟





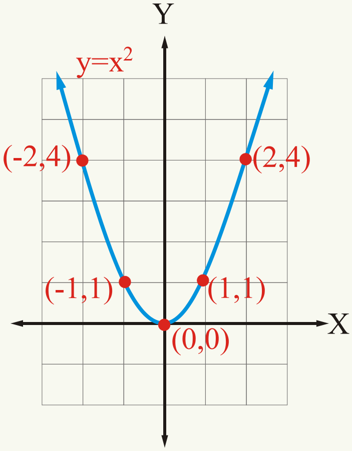
- این دو گراف با هم چه فرق دارند؟
- درتوابع $k(x)=x^2, h(x)=x^2+3x\ , g(x)=x^2+1, f(x)=x^2+7x+12$ و $r(x)=2x-1$ کدام‌یک از آن‌ها تابع درجه دوم نمی‌باشد.

یک تابع پولینومی درجه یک به نام تابع درجه یک یا تابع خطی (Liner function) یاد می‌شود. تابع پولینومی درجه دوم به نام تابع درجه دوم یاد می‌گردد.

فعالیت

- گراف تابع درجه دوم را به چه نام یاد می‌کنند؟
- محور تناظر گراف تابع درجه دوم کدام خط می‌باشد؟
- دهن گراف تابع درجه دوم چه وقت به طرف بالا و چه وقت به طرف پایین باز می‌شود؟
- رأس گراف تابع درجه دوم در کدام حالت اصغری (Minimum) و در کدام حالت اعظمی (Maximum) می‌باشد؟
- آیا کمیات وضعیهٔ نقطهٔ رأس تابع درجه دوم را دریافت کرده می‌توانید؟
- درکدام حالت گراف تابع محورهای X و Y را قطع کرده می‌تواند؟
- آیا کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع گراف تابع درجه دوم را با محورهای X و Y دریافت کرده می‌توانید؟

$f(x)=ax^2+bx+c$ شکل عمومی تابع درجه دوم می‌باشد که در آ ن b, a و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است.



گراف تابع درجه دوم

ساده‌ترین تابع درجه دوم $f(x)=y=x^2$ که $a=1$ و $b=c=0$ می‌باشد. اگر چند قیمت برای x داده شود و قیمت‌های مربوط تابع یا y به دست آورده شود گراف آن رسم شده می‌تواند. طوری که درشکل مشاهده می‌شود.

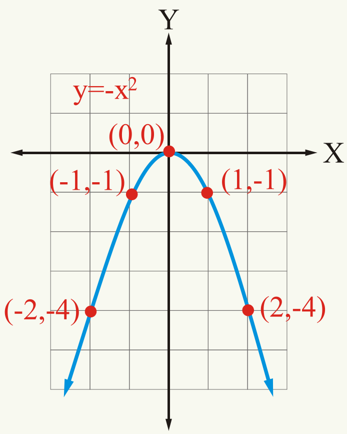
گراف تابع درجه دوم به نام پارابولا (parabola) یاد می‌شود.

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

که این گراف نظر به محور y متناظر می‌باشد. خطی که از رأس پارابولا بگذرد و با محور y موازی باشد به نام محور تناظر یاد می‌شود که در این گراف محور Y محور تناظر پارابولا می‌باشد. نقطه‌یی که در آن محور تناظر پارابولا را قطع می کند به نام رأس (Vertex) پارابولا یاد می‌شود.

اگر $a>0$ باشد دهن پارابولا به طرف بالا و رأس نقطهٔ اصغری پارابولا می‌باشد. گراف تابع $y=x^2$ در انتروال $(-\infty,0)$ متناقص و در انتروال $(0,\infty)$ متزاید است.

مثال 1: گراف $y=-x^2$ را رسم کنید.



حل: دهن پارابولا به‌طرف پایین است، زیرا که $a<0$ می‌باشد. گراف در انترول $(-\infty,0)$ متزاید و در انترول $(0,\infty)$ متناقص می‌باشد و رأس نقطهٔ اعظمی پارابول می‌باشد.

x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

فعالیت

گراف تابع $y=x^2+4$ را رسم کنید.

مثال 2: گراف توابع $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$ و $h(x)=\frac{1}{2}x^2$ را درعین سیستم کمیات وضعیه ترسیم نمایید و گراف‌ها را با هم مقایسه کنید.

$g(x)=2x^2$

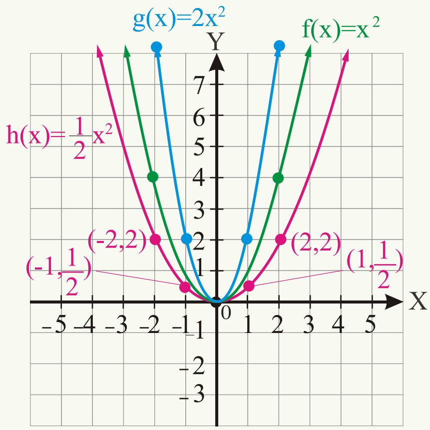
$x=$	0	1	-1	2	-2
$g(x)=$	0	2	2	8	8

$f(x)=x^2$

$x=$	0	1	-1	2	-2
$f(x)=$	0	1	1	4	4

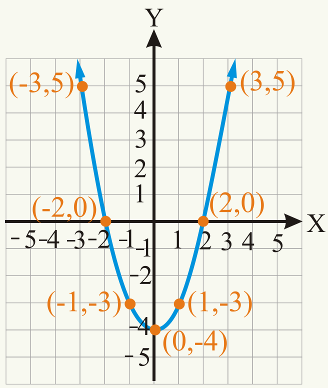
$h(x)=\frac{1}{2}x^2$

$x=$	0	1	-1	2	-2
$h(x)=$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



مثال 3: گراف تابع $y=x^2-4$ را رسم کنید.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

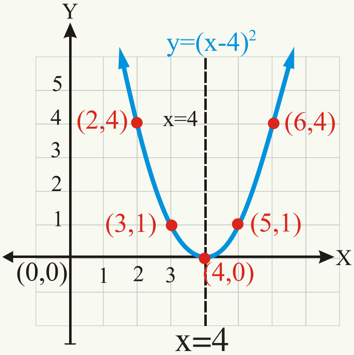


که درحقیقت گراف $y=x^2$ چهار واحد به طرف پایین انتقال می‌یابد.

مثال 4: گراف $y=(x-4)^2$ را رسم کنید.

حل: اگر چند قیمت برای x داده شود وقیمت‌های مربوط y آن به‌دست آورده شود.

گراف تابع رسم می‌شود؛ طور زیر:



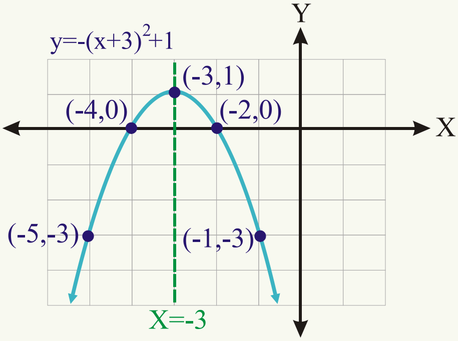
x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

مشاهده می‌شود که گراف در انتروال $(-\infty\ ,\ 4)$ متناقص و در انتروال $(4,\infty)$ متزاید می‌باشد.

از شکل مشاهده می‌شود که گراف $y=x^2$ به اندازهٔ 4 واحد طور افقی به طرف راست انتقال کرده است، رأس پارابولا نقطهٔ $(4\ ,0)$ ومحور تناظر گراف خط مستقیم $x=4$ می‌باشد.

مثال 5: گراف تابع $y=-(x+3)^2+1$ را ترسیم کنید.

گراف $y=x^2$ سه واحد به طرف چپ و یک واحد به طور عمودی به طرف بالا انتقال شده است و نقطه رأس پارابولا $(-3,1)$ است که بلندترین نقطهٔ پارابولا (نقطه اعظمی) می‌باشد. محور تناظر پارابولا $x=-3$ می‌باشد. که درشکل نیز مشاهده می‌شود.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

گراف‌های توابع $y=3x^2$ □ $y=-3x^2$ را رسم کنید.

نقاط تقاطع گراف با محورهای X و Y: برای آسانی ترسیم یک پارابول می‌توانیم که نقاط تقاطع پارابولا را با محورهای X و Y دریابیم (درصورتی که تقاطع با محور X داشته باشد) برای دریافت نقطهٔ تقاطع گراف با محور Y در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ $x=0$ وضع

می‌شود. در نتیجه $y=c$ می‌شود و برای دریافت نقاط تقاطع با محور X درمعادله $y=0$ وضع می‌شود، پس داریم که:

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$0 = ax^2 + bx + c$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

یک معادلهٔ درجه دوم می‌باشد و چون می‌دانید که جذرهای این معادله عبارت اند از:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ می‌باشند.

می‌دانید که جذرهای این معادله در صورتی اعداد حقیقی می‌باشند که $b^2 - 4ac \geq 0$ باشد.

اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد گراف محور X را قطع نمی‌کند یا به طور خلص درجدول زیر مشاهده کنید. گراف تابع $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

a	گراف تابع درجه دوم محور X را در دو نقطه قطع می‌کند در صورتی که $b^2 - 4ac > 0$ باشد.
b	محور X را دریک نقطه قطع می‌کند درصورتی که $b^2 - 4ac = 0$ باشد.
c	محور X را قطع نمی‌کند درصورتی که $b^2 - 4ac < 0$ باشد.

دریافت کمیات وضعیهٔ نقطهٔ رأس پارابولا: توسط طریقهٔ تکمیل مربع می‌توان کمیات وضعیه رأس پارابولا را دریافت کرد.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 \qquad + k$$

پس، کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ویا (h,k) می‌باشند؛ چون محور تناظر از نقطهٔ رأس پارابولا می‌گذرد، معادلهٔ محور تناظر $x=-\frac{b}{2a}$ است اگر $a>0$ باشد رأس اصغری (Minimum) و اگر $a<0$ باشد رأس اعظمی (Maximum) می‌باشد.

مثال 6: گراف تابع $f(x)=2x^2+4x+5$ را رسم کنید.

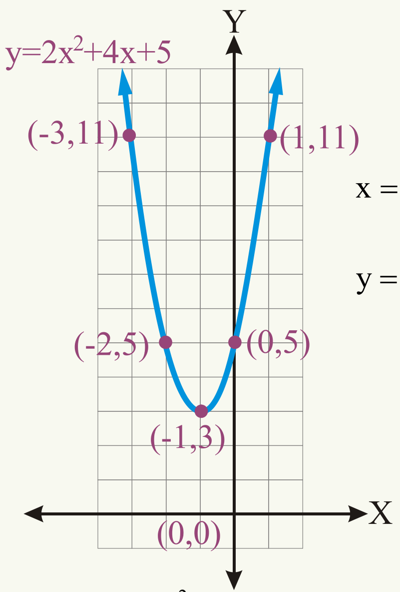
1 - نقطهٔ تقاطع با محور X را به دست می‌آوریم، چون $a=2$ ، $b=4$ و $c=5$ می‌باشد.

$$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$$

پس گراف، محور x را قطع نمی‌کند، زیرا $\Delta<0$ می‌باشد.

2 - نقطهٔ تقاطع گراف را با محور Y به دست می‌آوریم، در این حالت $x=0$ می‌باشد.

درتابع $y=ax^2+bx+c$ درصورتی که $x=0$ شود $y=c$ می‌گردد $(0,c)$ نقطه تقاطع گراف با محور y می‌باشد. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$



$f(x)=2x^2+4x+5$

$x=$	-1	-2	0	1	-3
$f(x)=$	3	5	5	11	11

که در این مثال $(0,5)$ نقطهٔ تقاطع گراف با محور Y می‌باشد.

3 – کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا عبارت اند از:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

(-1 , 3) کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا می‌باشد و رأس اصغری است، زیرا که $a>0$ می‌باشد.

4 – معادلهٔ محور تناظر $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

معادلهٔ محور تناظر گراف $x=-1$ می‌باشد.

غرض ترسیم گراف می‌توانیم چند نقطهٔ دیگر گراف را نیز دریابیم.

مثال 7: گراف تابع $y=-3x^2-2x+1$ را رسم کنید.

$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

مربع نصف ضریب x را هم جمع و هم تفریق می‌نماییم.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

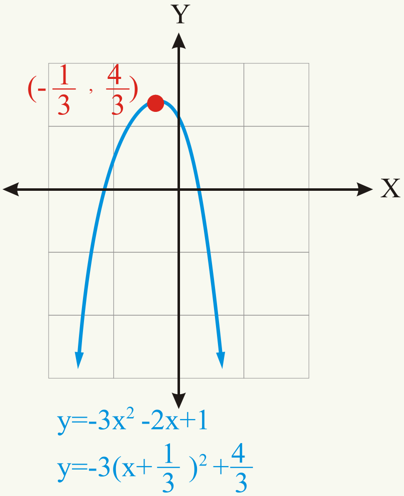
$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$

در نتیجه $x=-\frac{1}{3}$ معادلهٔ محور تناظر بوده،

زیرا که: $x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ می‌شود. و

$(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ کمیات وضعیهٔ رأس می‌باشد؛ چون $a<0$ است، پس رأس پارابولا نقطهٔ اعظمی آن می‌باشد.



یادداشت: اگر تابع درجه دوم به شکل

$y=a(x-h)^2+k$ یا $y-k=a(x-h)^2$

آورده شود. $x=h$ معادلهٔ محور تناظر و

(h,k) کمیات وضعیه رأس می‌باشند.

$f(x)=ax+b$ ، $(a\neq 0)$ شکل عمومی تابع درجه یک یا تابع خطی می‌باشد و $f(x)=y=ax^2+bx+c$ ، $a\neq 0$ شکل عمومی تابع درجه دوم بوده که گراف تابع درجه دوم را به نام پارابولا (parabola) یاد می‌کنند. اگر $a>0$ باشد رأس اصغری و اگر $a<0$ باشد رأس اعظمی می‌باشد. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ کمیات وضعیهٔ رأس پارابولا

و $x=-\frac{b}{2a}$ معادلهٔ محور تناظر پارابولا می‌باشد.اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد، پارابولا محور X را در دونقطه و اگر $\Delta=0$ باشد، پارابولا محور X را دریک نقطه قطع می کند و اگر $\Delta<0$ باشد پارابولا محور X را قطع کرده نمی‌تواند.

تمرین

1 - گراف $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ را رسم کنید.

2 - گراف‌های توابع $g(x)=2x+1$ و $g(x)=2x-1$ را درعین سیستم کمیات وضعیه رسم و باهم مقایسه کنید.

3- گراف‌های توابع $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ را در عین سیستم کمیات وضعیهٔ رسم و باهمدیگر مقایسه کنید.

4 - معادله‌های محورهای تناظر گراف توابع زیر را دریابید.

$f(x)=3x^2-2x+6$ $\quad$ $f(x)=x^2-12x+30$ $\quad$ $f(x)=x^2+8x+13$

5 - گراف‌های توابع $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ و $h(x)=(x-3)^2$ را رسم کنید و بگویید که با گراف $f(x)=x^2$ چه ارتباط دارند؟

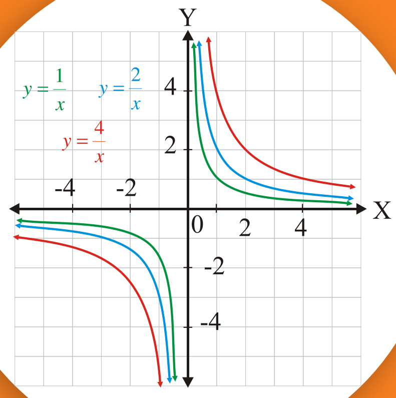
6 - کمیات وضعیهٔ رأس گراف تابع $y=-x^2-1$ عبارت اند از:

a: $(-1,1)$ $\quad$ b: $(1,-1)$ $\quad$ c: $(0,-1)$ $\quad$ d: $(0,1)$

7 - کمیات وضعیهٔ رأس تابع $y=(x-1)^2-2$ عبارت اند از:

a: $(1,1)$ $\quad$ b: $(-1,2)$ $\quad$ c: $(-1,-2)$ $\quad$ d: $(1,-2)$

توابع ناطق یا توابع نسبتی
(Rational Functions)



این شکل، مربوط به گراف‌های کدام تابع می باشد؟

فعالیت

- آیا معادلهٔ مجانب عمودی تابع ناطق را دریافت کرده می توانید؟
- آیا در ناحیهٔ تعریف هر تابع ناطق، ست تمام اعداد حقیقی شامل شده می‌توانند؟
- آیا مجانب افقی یک تابع ناطق را دریافت کرده می‌توانید؟
- آیا هر تابع ناطق دارای مجانب عمودی می‌باشد؟

تعریف

تابع ناطق عبارت از تابعی است که از خارج قسمت دو تابع پولینومی تشکیل شده باشد. اگر $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ باشد، $(g(x)\neq 0)$ $f(x)$ را تابع ناطق می گویند؛ درصورتی که $p(x)$ و $g(x)$ پولینوم‌ها باشند.

ناحیهٔ تعریف تابع ناطق ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد. بدون آن قیمت‌های x که در آن مخرج تابع ناطق مساوی به صفر می‌شود.

طور مثال: توابع $f(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$, $g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ و $P(x)=2x^2-3$ توابع ناطق اند.

فعالیت

آیا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یک تابع ناطق می‌باشد؟ چرا؟

دریافت ناحیهٔ تعریف یک تابع ناطق
(Finding Domain of Rational function)

مثال1: ناحیهٔ تعریف هریک از توابع ناطق ذیل را دریابید:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: در تابع $f(x)$ مخرج تابع به $x=3$ صفر می‌شود؛ پس عدد (3) درناحیهٔ تعریف تابع ناطق $f(x)$ شامل نیست. یا: $\text{Dom } f(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3\}$

درتابع $g(x)$ به $x=3$ یا $x=-3$ مخرج تابع صفر می‌شود ، درنتیجه اعداد 3 و 3- در ناحیهٔ تعریف $g(x)$ شامل نیست.

$$\text{Dom } g(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3 \ , \ x\neq -3\}$$

چون مخرج تابع $h(x)$ به هیچ قیمت x صفر نمی‌شود؛ پس ناحیهٔ تعریف $h(x)$ ست تمام اعداد حقیقی می‌باشند.

$\text{Dom } h(x)=IR$ یا $\text{Dom } h(x)=(-\infty , \infty)$

فعالیت

ناحیهٔ تعریف توابع ناطق ذیل را دریابید.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

مثال2: ناحیهٔ تعریف و ناحیهٔ قیمت‌های توابع ناطق ذیل را دریابید.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \quad , \quad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: ناحیهٔ تعریف $f(x)$ تمام اعداد حقیقی بدون عدد 4 می‌باشند.

$$\text{dom}\, f(x)=IR-\{4\}=IR\setminus\{4\}$$

$$y=f(x)=\frac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4)=x+3$$

$$xy-x=4y+3$$

$$(y-1)x=4y+3$$

$$xy-4y=x+3 \Rightarrow x=\frac{4y+3}{y-1}$$

$\text{Range}\, f(x)=IR\setminus\{1\}$ یا $IR-\{1\}$

ناحیهٔ تعریف تابع $g(x)$، تمام اعداد حقیقی بدون (-5) می باشد.

$\text{dom}\, g(x)=IR-\{-5\}$ یا $\{x\in IR / x\neq -5\}$

$$g(x)=y=\frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5)=x-3 \Rightarrow xy+5y=x-3$$

$$x=\frac{-5y-3}{y-1}$$

$\text{Range}\, g(x)=IR-\{1\}$ یا $\{y\in IR / y\neq 1\}$

فعالیت

ناحیهٔ تعریف وناحیهٔ قیمت‌های توابع زیر را دریابید.

$$h(x)=\frac{1}{x^3} \quad , \quad k(x)=\frac{x+1}{3} \quad , \quad r(x)=\frac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x)=\frac{x}{3x-2}$$

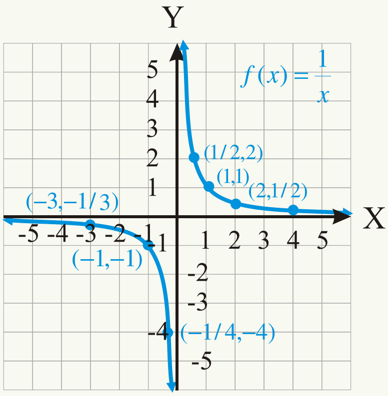
گراف تابع ناطق (Graphing Rational function)

مثال3: گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را ترسیم کنید.

حل: چون به $x=0$ مخرج تابع صفر می‌شود؛ پس صفر در ناحیهٔ تعریف تابع $f(x)$ شامل نمی‌باشد.

$$\text{dom}\, f=IR-\{0\}$$

x	$\ldots-4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
$f(x)$	$\ldots-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$



حال وضعیت تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را مطالعه می‌کنیم، چون x=0 درناحیهٔ تعریف تابع شامل نمی‌باشد، برای ترسیم گراف این تابع به x قیمت‌هایی داده می‌شود که از هردو طرف به صفر نزدیک شود (تقرب کند). اگر x از طرف چپ به صفر نزدیک شود $(x\to 0^-)$ قیمت تابع به $-\infty$ تقرب می کند $f(x)\to -\infty$ و اگر x از طرف راست به صفر نزدیک شود $(x\to 0^+)$ قیمت تابع به $+\infty$ تقرب می کند $(f(x)\to\infty)$ جدول زیر را مشاهده کنید.

a: x از طرف چپ به صفر تقرب می‌کند.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b: x از طرف راست به صفر تقرب می‌کند.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

مجانب عمودی (Vertical Asymptotes)

هرگاه در یک تابع ناطق $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ که صورت و مخرج فکتور مشترک نداشته باشند و $p(a)\neq 0$ باشد؛ اگر $g(a)=0$ باشد خط $x=a$ مجانب عمودی تابع $f(x)$ می‌باشد که موازی با محور y است تعداد مجانب‌های عمودی مساوی به جذرهای مخرج می‌باشند.

یا به عباره دیگر، اگر $x\to a$ درنتیجه $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$، پس خط عمودی $x=a$ مجانب عمودی تابع می‌باشد.

یا اگر $x\to a \Rightarrow |f(x)|\to\infty$ پس x=a مجانب عمودی تابع می‌باشد. x هر قدر که به قیمت a نزدیک شود گراف تابع، خط مستقیم $x=a$ راقطع کرده نمی‌تواند.

زیرا که عدد a درناحیهٔ تعریف تابع $f(x)$ شامل نمی‌باشد؛ طور مثال درناحیهٔ تعریف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ صفر شامل نمی‌باشد؛ پس $x=0$ یا محور Y مجانب عمودی تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ می‌باشد.

مثال 4: مجانب‌های عمودی توابع $f(x)=\frac{2x}{x-3}$, $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ و $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ را دریابید.

حل

1 - غرض یافتن مجانب عمودی تابع $f(x)$ آن قیمت x را که مخرج تابع را صفر می کند به‌دست می‌آوریم؛ پس عدد 3 در ساحهٔ تعریف تابع $f(x)$ شامل نمی‌باشد.

$$\text{dom}f(x)=\{x/x\in IR\ ,x\neq 3\}$$

خط مستقیم x=3 مجانب عمودی تابع $f(x)$ می‌باشد.

2-

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$

$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$

به قیمت $x=5$ و $x=-5$ مخرج تابع $g(x)$ صفر می‌شود؛ پس اعداد $x=5$ و $x=-5$ در ساحهٔ تعریف تابع $g(x)$ شامل نمی‌باشند.

$$\text{dom}\,g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq -5,\ x\neq 5\}$$

خطوط $x=5$ و $x=-5$ مجانب‌های عمودی تابع $g(x)$ می‌باشند.

3 - چون با هیچ قیمت x مخرج تابع $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ صفر نمی‌شود، یا این تابع مجانب عمودی ندارد یا ساحهٔ تعریف این تابع تمام اعداد حقیقی می‌باشند.

مجانب افقی (Horizontal Asymptote)

هرگاه در یک تابع ناطق صورت و مخرج هم‌درجه باشند، واضح است که خارج‌قسمت

یک عدد ثابت می‌باشد. اگر این عدد ثابت b باشد؛ پس خط افقی $y=b$ مجانب افقی تابع بوده که این خط، خود محور X ویا موازی با محور X می‌باشد. درحقیقت عدد b عبارت از نسبت ضرایب بلندترین توان‌های صورت و مخرج می‌باشد و یا صورت را بالای مخرج تقسیم می کنیم.

طورمثال: مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ عبارت از خط $y=2$ می‌باشد.

مجانب افقی را این‌طور تعریف می‌نماییم.

اگر $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ و درنتیجه $f(x)\to b$، پس خط $y=b$ مجانب افقی تابع $f(x)$ می‌باشد یا اگر $|x|\to\infty$ درنتیجه $y\to b$ خط مستقیم $y=b$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

مثال5: گراف تابع $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ را ترسیم کنید.

حل

1 - تقاطع گراف با محور X: درنقطهٔ تقاطع گراف با محور (X) قیمت $f(x)=0$ می‌شود درنتیجه داریم که:

$$0=\frac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

گراف تابع محور X را درنقطهٔ $(0,0)$ قطع می کند.

2 - نقطهٔ تقاطع گراف با محور Y: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$، پس نقطهٔ $(0,0)$ نقطهٔ تقاطع گراف با محور X و Y می‌باشد یا گراف این تابع از مبداء کمیات وضعیه می گذرد.

3 - معادلهٔ مجانب عمودی تابع عبارت از $x-1=0\Rightarrow x=1$ می‌باشد این خط را ترسیم کنید.

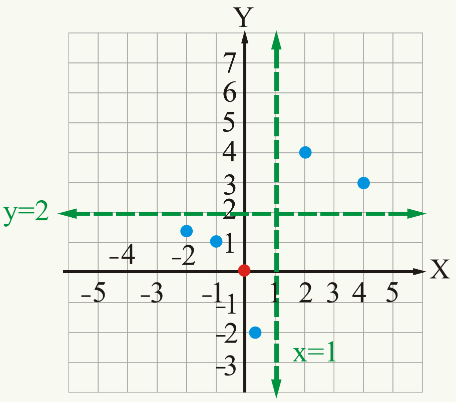
4 - مجانب افقی گراف تابع $\dfrac{2}{1}=2$ پس $y=f(x)=2$ مجانب افقی تابع می‌باشد یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ مجانب افقی را نیز ترسیم کنید.

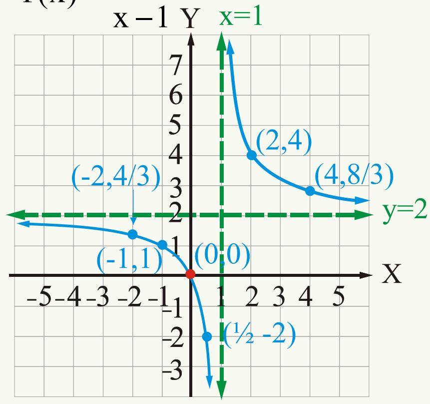
5 - کمیات وضعیهٔ چند نقطهٔ دیگر را نیز معلوم می کنیم؛ طورمثال :

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

نقاط تقاطع با محورها را تعیین می‌کنیم. مجانب‌ها را رسم نموده، بعد گراف تابع را رسم می‌کنیم، طوری‌که درشکل مشاهده می‌شود.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعالیت

گراف تابع $f(x)=\frac{3x}{x-2}$ را ترسیم کنید.

مثال6: گراف تابع $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ را ترسیم نمایید مجانب افقی و عمودی تابع را دریابید.

حل: معادله‌های مجانب‌های عمودی و افقی عبارت اند از:

1 – معادله مجانب عمودی: $x=2$

2 – معادله مجانب افقی: $f(x)=y=1$

3 – تقاطع با محور Y: باید x=0 شود. در نتیجه $f(x)=-1$ می‌شود، گراف محور Y را در نقطهٔ $(0,-1)$ قطع می‌کند.

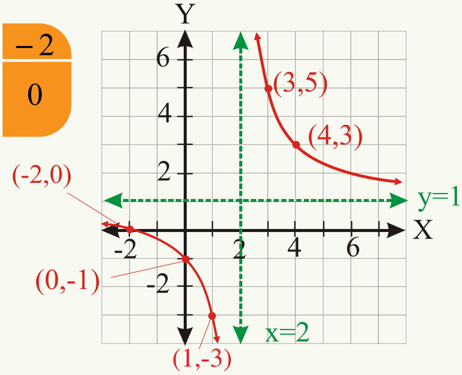
4 – تقاطع با محور X: باید f(x)=0 شود در نتیجه

$$x+2=0$$
$$x=-2$$

در نقطهٔ (-2,0) گراف محور X را قطع می‌کند.

5 - برای آسانی ترسیم گراف، قیمت‌های هر شاخهٔ تابع را درجدول ذیل مشاهده کنید.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



اگر صورت بر مخرج تقسیم گردد $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$.

درحقیقت گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ به اندازهٔ یک واحد به طرف بالا و به اندازهٔ 2 واحد به طرف راست انتقال شده است و $y=f(x)=1$ مجانب افقی تابع می‌باشد.

مجانب مایل: (slant or Oblique asymptote)

هر گاه درجهٔ صورت یک تابع ناطق از درجهٔ مخرج به اندازهٔ یک، اضافه ترباشد واضح است که تابع مجانب افقی نداشته و در این صورت تابع مجانب مایل دارد.

مثال 7: گراف تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ را ترسیم کنید.

حل

1 - برای یافتن مجانب مایل، صورت را بر مخرج تقسیم می‌نماییم داریم که:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مجانب مایل}}+\frac{2}{x-1}$$

اگر $|x|$ هر چه بزرگتر شود $\frac{2}{x-1}$ به صفر نزدیک می‌شود. درنتیجه، گراف به خط $y=f(x)=x+1$ نزدیک می‌شود که همین خط $y=x+1$ عبارت از مجانب مایل تابع

$f(x)$ می‌باشد.

2 – نقطهٔ تقاطع با محور Y: $f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$ گراف محور Y را در نقطه $(0,-1)$ قطع می کند.

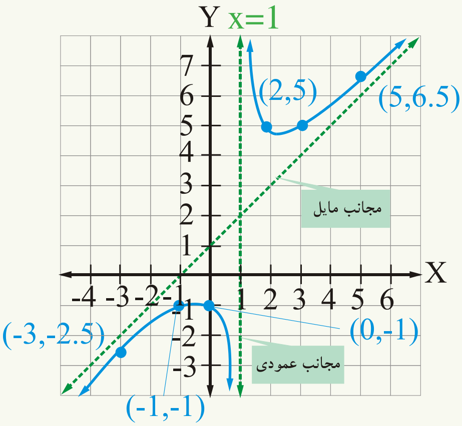
3 – واضح است که گراف محور X را قطع کرده نمی‌تواند، زیرا که $x=\sqrt{-1}$ می‌شود.

4 – مجانب عمودی

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

5 – واضح است که مجانب افقی ندارد.

6 – چند قیمت دیگری را نیز به دست می آوریم و گراف تابع را رسم می‌نماییم.



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

مثال 8: گراف تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ را رسم کنید.

1 – مجانب عمودی تابع $x=2$ می‌باشد، زیرا که: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 – x^2+1 بر $x-2$ تقسیم می کنیم داریم که: $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$

اگر $|x|$ بزرگ شود $\frac{5}{x-2}$ به صفر نزدیک می‌شود و گراف تابع به خط $y=x+2$ نزدیک می‌شود، که $y=x+2$ مجانب مایل این تابع می‌باشد.

3 – تقاطع گراف با محور Y عبارت از $-\frac{1}{2}$ می‌باشد، زیرا اگر $x=0$ شود

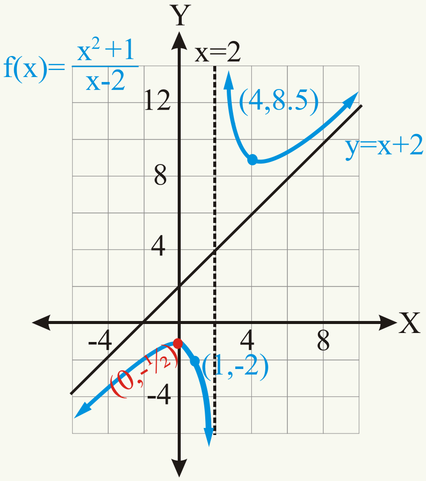
$$f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$$

4 - گراف با محور X تقاطع ندارد، زیرا که اگر $f(x)=0$ شود، پس:

$$0=\frac{x^2+1}{x-2}\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x=\sqrt{-1}$$ «که در اعداد حقیقی تعریف نشده است»

با رسم کردن مجانب‌ها و توسط تعیین نقطهٔ تقاطع با محور y و چند نقطهٔ دیگر تابع، می‌توان گراف تابع را رسم کرد.

x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5



اگر در تابع $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ اعداد m، n به ترتیب درجه‌های صورت و مخرج باشند، پس:

1 - اگر $m<n$ باشد محور X مجانب افقی می‌باشد.

2 - اگر $m=n$ باشد $y=b$ مجانب افقی می‌باشد. b عبارت از نسبت ضرایب حدود درجه‌های m و n می‌باشد یا اگر $f(x)=\frac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ باشد $y=\frac{a_n}{b_n}$ عبارت از مجانب افقی تابع f(x) می باشد.

3 - اگر $m>n$ باشد گراف مجانب افقی ندارد.

4 - اگر درجهٔ صورت به اندازهٔ یک اضافه‌تر از درجهٔ مخرج باشد، گراف تابع مجانب مایل دارد که در بی‌نهایت با گراف موازی می‌شود.

یک تابع ناطق می‌تواند یک یا چند مجانب عمودی را دارا باشد، درحالی که یک مجانب افقی یا مایل داشته می‌باشد.

تمرین

1 – مجانب‌های عمودی و افقی تابع $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$ را دریابید.

2 – آیا تابع $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ مجانب عمودی دارد؟ چرا؟

3 – ناحیهٔ تعریف توابع داده شدهٔ ذیل را دریابید و نیز معادله‌های مجانب‌های عمودی آن‌ها را بنویسید.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – مجانب‌های عمودی توابع ذیل (اگر داشته باشد) را دریابید.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\ ,\ g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\ ,\ k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – گراف توابع ناطق زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2} \qquad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 – مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{3x+1}{x-3}$ عبارت است از:

a : $y=2$ b: $y=3$ c: $y=-2$ d: $y=-3$

7 – گراف توابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ و $f(x)=\frac{3}{x+2}$ را رسم کنید و با گراف تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ مقایسه کنید.

8 – مجانب مایل تابع $\frac{x^2}{x-1}$ را دریابید.

خلاصهٔ فصل

- تابع در بین دو ست یک رابطهٔ یا قاعده می‌باشد، طوری که هر عنصر ست اولی محض با یک عنصر ست دومی ارتباط داشته باشد. ست اولی به نام ناحیهٔ تعریف (Domain) و ست دومی به نام (Ragne) یاد می‌شود یا تابع ست جوره‌های مرتب می‌باشد که عناصر اولی آن تکرار نشده باشند.
- روش ارائهٔ یک تابع $y = f(x)$ می‌باشد، برای یافتن قیمت یک تابع، در یک نقطه قیمت داده شده x را در معادلهٔ تابع وضع می‌نماییم، قیمت تابع در همان نقطه به دست می‌آید. یک معادله وقتی نشان دهندهٔ یک تابع می‌باشد که برای هر x یک y وجود داشته باشد.
- درناحیهٔ تعریف (Domain) یک تابع اعدادی شامل می‌باشند که تابع در آن تعریف شده باشد یا قیمت تابع یک عدد حقیقی باشد. گراف یک تابع در مستوی XY ست نقاط S می باشند، طوری که $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ که x در ناحیهٔ تعریف تابع شامل باشد. اگر خط موازی با محور y گراف را محض دریک نقطه قطع کند گراف، گراف یک تابع می‌باشد.
- $f(x) = c$ تابع ثابت، $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ تابع خطی $f(x) = x$ تابع عینیت و $f(x) = |x|$ تابع قیمت مطلقه می‌باشد که ناحیهٔ تعریف آن اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های آن صفر و اعداد مثبت حقیقی می‌باشند.
- تابع علامه این طور تعریف شده است

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ناحیهٔ تعریف این تابع، ست اعداد حقیقی و ناحیهٔ قیمت‌های آن $\{-1, 0, 1\}$ می‌باشد.

- $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ شکل عمومی تابع درجه دوم بوده که گراف تابع درجه دوم را به نام پارابولا (parabola) یاد می‌کنند. اگر $a > 0$ باشد رأس اصغری و اگر $a < 0$ باشد رأس پارابولا نقطهٔ اعظمی گراف می‌باشد. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ کمیات وضعیهٔ رأس

پارا بولا، $x=-\frac{b}{2a}$ معادلهٔ محور تناظر پارابولا می‌باشد؛ اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد پارابولا محور X را در دو نقطه، اگر $\Delta=0$ باشد، پارابولا محور X را در یک نقطه قطع می‌کند و اگر $\Delta<0$ باشد پارابولا محور X را قطع کرده نمی‌تواند.

• اگر درتابع $f(x)$ ، $x_1<x_2$ باشد ونتیجه شود که $f(x_1)<f(x_2)$ شود تابع متزاید و اگر $x_1<x_2$ باشد و درنتیجه $f(x_1)>f(x_2)$ شود تابع متناقص. اگر $f(-x)=f(x)$ باشد تابع $f(x)$ جفت و اگر $f(-x)=-f(x)$ شود تابع $f(x)$ تاق می‌باشد.

• انتقال به (2) نوع می‌باشد (انتقال عمودی و انتقال افقی)

انتقال عمودی: هر گاه c یک عدد مثبت باشد.

اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد طور عمود به طرف بالا انتقال شود گراف تابع $y=f(x)+c$ به دست می‌آید.

اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد طور عمودی به طرف پایین انتقال شود، گراف تابع $y=f(x)-c$ به دست می‌آید.

• **انتقال افقی:** هر گاه c یک عدد مثبت باشد.

اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به طرف چپ انتقال داده شود، گراف تابع $y=f(x+c)$ به دست می‌آید.

اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازهٔ c واحد به طرف راست انتقال شود، گراف تابع به $y=f(x-c)$ دست می‌آید.

• عملیه‌های توابع طور زیر تعریف شده‌اند:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$(f\cdot g)(x)=f(x).\ g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$

$\mathrm{dom}\,(f+g)(x)=\mathrm{dom}\ f\cap\ \mathrm{dom}\,g$

$\mathrm{dom}\,(f-g)(x)=\mathrm{dom}\ f\cap\ \mathrm{dom}\,g$

$\mathrm{dom}\,(f\cdot g)(x)=\mathrm{dom}\ f\cap\ \mathrm{dom}\,g$

$\mathrm{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\mathrm{dom}\ f\cap\ \mathrm{dom}\,g\ -\ \{x/g(x)=0\}$

• ناحیهٔ تعریف توابع مرکب:

$$Dom(f\,o\,g)(x)=\{x/x\in dom\,g \quad , \quad g(x)\in dom\,f\}$$

$$Dom\,(g\,o\,f)(x)=\{x/x\in dom\,f \quad , \quad f(x)\in dom\,g\}$$

• معکوس تابع یک به یک نیز یک تابع می‌باشد.

• خط موازی با محور x (خط افقی) گراف تابع یک به یک را در یک نقطه قطع می‌کند.

• برای دریافت معکوس تابع یک به یک $y=f(x)$ معادله را برای x حل می‌نماییم، بعد x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم. تابع به دست آمده $f^{-1}(x)$ تابع معکوس $f(x)$ می‌باشد.

گراف تابع $f(x)$ و گراف تابع معکوس $f(x)$ نظر به خط y=x متناظر یکدیگر می‌باشند.

• اگر در تابع ناطق $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ اعداد m و n به ترتیب درجه‌های صورت و مخرج باشند؛ پس:

1 – اگر $m<n$ باشد محور X مجانب افقی می‌باشد.

2 – اگر $m=n$ باشد $y=b$ مجانب افقی بوده و b عبارت از نسبت ضرایب حدود درجه‌های m و n می‌باشد یا اگر $f(x)=\dfrac{a_n x^n+\ldots+a_0}{b_n x^n+\ldots+b_0}$ باشد $(b_n\neq 0)$ $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ عبارت از مجانب افقی تابع f(x) می‌باشد.

3 – اگر $m>n$ باشد مجانب افقی ندارد.

4 – اگر درجهٔ صورت به اندازهٔ یک اضافه‌تر از درجهٔ مخرج باشد، گراف مجانب مایل دارد.

• یک تابع ناطق می‌تواند یک یا چند مجانب عمودی را دارا باشند، در حالی که یک مجانب افقی یا مایل داشته می‌باشد.

تمرین فصل

1 - کدام‌یک از ست‌های جوره‌های مرتب زیر تابع را نشان می‌دهد؟ ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های آن‌ها را تعیین کنید.

1 − $\{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

2 − $\{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

3 − $\{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

4 − $\{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - اگر $g(x)=x^2+2x+3$ باشد $g(-x), g(-1)$ و $g(x+5)$ را دریابید.

3 - اگر $h(x)=x^4+x^2+1$ باشد $h(-1), h(2)$ $h(-x)$ و $h(3a)$ را دریابید.

4 - ناحیهٔ تعریف توابع ذیل را دریابید.

$f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $f(x)=2x$

$f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

$f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$

5 - اگر $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ باشد، $f(0), f(3)$ و $f(-2)$ را دریابید.

6 - اگر $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ باشد، $g(-6), g(0)$ و $g(-3)$ را دریابید.

7 - اگر $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ باشد، $h(0), h(3)$ و $h(5)$ را دریابید.

8 - کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را تعریف می کند:

$x^2+y^2=16$ $\qquad$ $x^2+y=16$ $\qquad$ $x+y=16$

$x+y^3=8$ $\qquad$ $y=\sqrt{x+4}$ $\qquad$ $x=y^2$

9 - در توابع زیر کدام‌یک تابع تاق، کدام‌یک جفت و کدام‌یک نه تابع جفت و نه تاق می‌باشد؟

$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ، $f(x) = \dfrac{2}{x-6}$

10 - گراف‌های توابع $f(x) = x^2 - 1$ □ $f(x) = (x-1)^2$ را رسم و با گراف $f(x) = x^2$ مقایسه کنید.

11- $(f+g), (f-g), (f \cdot g)$ □ $(\dfrac{f}{g})$ توابع زیر را دریابید و ناحیهٔ تعریف هریک را تعیین کنید.

$f(x) = 4x - 1$ $\qquad$ $g(x) = 6x + 3$

$f(x) = \sqrt{2x+5}$ $\qquad$ $g(x) = \sqrt{4x-9}$

$f(x) = 4x^2 - 11x + 2$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 5$

12 - اگر $f(x) = 4x^2 - 2x$ □ $g(x) = 8x + 1$ باشد ؛پس:

$(f+g)(3)$ $\qquad$ $(f+g)(-5)$ $\qquad$ $(f \cdot g)(4)$

$(\dfrac{f}{g})(4)$ $\qquad$ $(fog)(2)$ $\qquad$ $(gof)(-5)$

را دریابید.

13 - fog و gof را دریابید اگر:

$f(x) = 8x + 12$ $\qquad$ $g(x) = 3x - 1$

$f(x) = 5x + 3$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 4x + 3$

$f(x) = -x^3 + 2$ $\qquad$ $g(x) = 4x$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = x^2$

$f(x) = \sqrt{x+2}$ $\qquad$ $g(x) = 8x^2 - 6$

14 - با در نظرداشت گراف تابع y=f(x) بگویید که گراف تابع $y = f(x) - 5$ به اندازه 5 واحد:

a- به طرف پایین انتقال شده است $\qquad$ b- به طرف بالا انتقال شده است

c - به طرف راست انتقال شده است $\qquad$ d- به طرف چپ انتقال شده است

15 - اگر f(x) طور زیر تعریف شده باشد، گراف آن را رسم و ناحیه‌های تعریف و قیمت‌های

آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>1\\ x^2 & -1<x<1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$

16 – ساحهٔ تعریف و ساحهٔ قیمت‌های تابع $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ را تعیین کنید.

17 – ساحهٔ تعریف و ساحهٔ قیمت‌های تابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ را تعیین کنید.

18 – ساحه‌های تعریف توابع ناطق زیر را دریابید و اگر مجانب عمودی داشته باشند، معادله های مجانب‌های عمودی را نیز به دست آورید.

$f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\quad g(x)=\frac{7x}{x-8}$ $\quad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64}$ $\quad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\quad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$

19 – گراف های توابع

$f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ □ $f(x)=x^2-2$ را در عین سیستم کمیات وضعیه رسم و آن را با گراف تابع $f(x)=x^2$ مقایسه کنید.

20 – کمیات وضعیهٔ رأس‌ها و معادله‌های تناظر توابع درجه دوم زیر را دریابید:

$y=(x-2)^2$ $\quad y=(x+3)^2-4$

21 – گراف تابع $y=-\frac{x}{2}$ را رسم کنید.

22 – مجانب عمودی و مایل تابع $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ را دریابید.

23 – معادلهٔ مجانب افقی $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ عبارت است از:

a) $y=-1$ $\quad$ b) $y=1$ $\quad$ c) $y=-\frac{1}{4}$ $\quad$ d) $y=4$

24 - گراف تابع $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2 \\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ را رسم کنید.

25 - گراف تابع $g(x)=|x|-5$ را رسم و ناحیهٔ قیمت‌های این تابع را مشخص کنید.

26 - در ناحیهٔ قیمت‌های تابع علامه کدام اعداد شامل می‌باشند؟

27 - معکوس هر یک از توابع زیر را دریابید و نیز نشان دهید که $f(f^{-1}(x)) = x$ می‌باشد.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad f(x)=8x-1$ $\qquad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad f(x)=x^3-1$

28 - آیا تابع $g(x)=x^2$ معکوس‌پذیر می‌باشد (معکوس آن نیز یک تابع می‌باشد)

29 - اگر $(fog)(x)=(gof)(x)$ باشد تابع f با g چی رابطه دارد؟

30 - کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع گراف تابع $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ با محورهای X و Y را دریابید.

31 - گراف تابع $f(x)=-3$ را رسم کنید.

32 - کمیات وضعیهٔ نقطه رأس گراف تابع $f(x)=2x^2+4x+5$ را دریابید.

33 - در عین سیستم کمیات وضعیهٔ گراف‌های توابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ □ $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ را رسم و با گراف تابع $f(x)=x^2$ مقایسه کنید.

34 - مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ عبارت است از:

$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

$c:\ y=x+1$

فصل چهارم
توابع مثلثاتی





زاویه و رادیان(Angle and Radian)
زاویه و واحدهای اندازه‌گیری یک زاویه

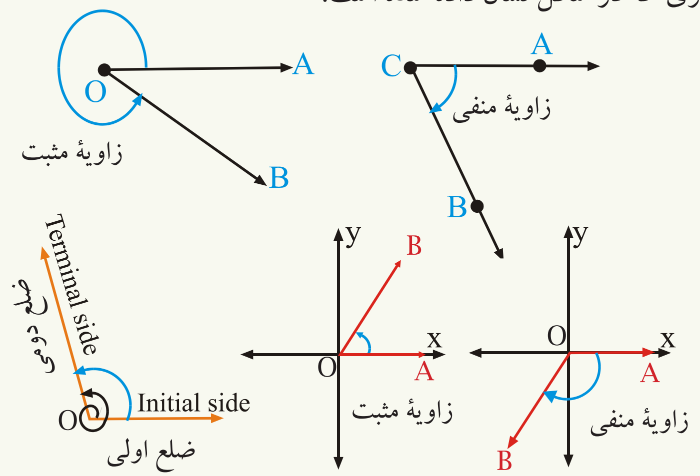
آیا زاویه در مثلثات و هندسه با هم فرق دارد؟
آیا در هندسه زوایای منفی وجود دارد؟

از هندسه می‌دانیم، زاویه شکلی‌است که از اتحاد دو نیم‌خط که مبدأ مشترک داشته باشند تشکیل شده باشد که مبدأی مشترک عبارت از رأس زاویه می‌باشد. در هندسه زاویه از 1° الی 360° می‌باشد؛ لیکن در مثلثات علاوه بر زوایای مثبت یا منفی به هر اندازه زاویه را می‌توانیم داشته باشیم.

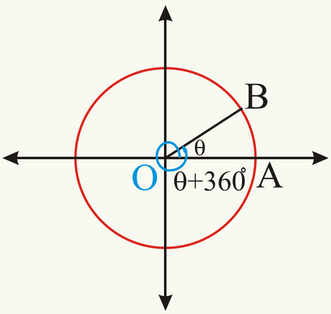
در مثلثات زاویه از دوران یک خط طوری که یک انجام آن ثابت باشد حاصل می‌شود که بعد از دوران خط اولی، موقعیت ضلع دومی را اختیار می کند.(یک ضلع آن در نقطهٔ رأس دوران می کند)

دوران مطابق حرکت عقربه ساعت(clockwise) منفی و مخالف حرکت عقربهٔ ساعت (counter clockwise) مثبت فرض شده است.

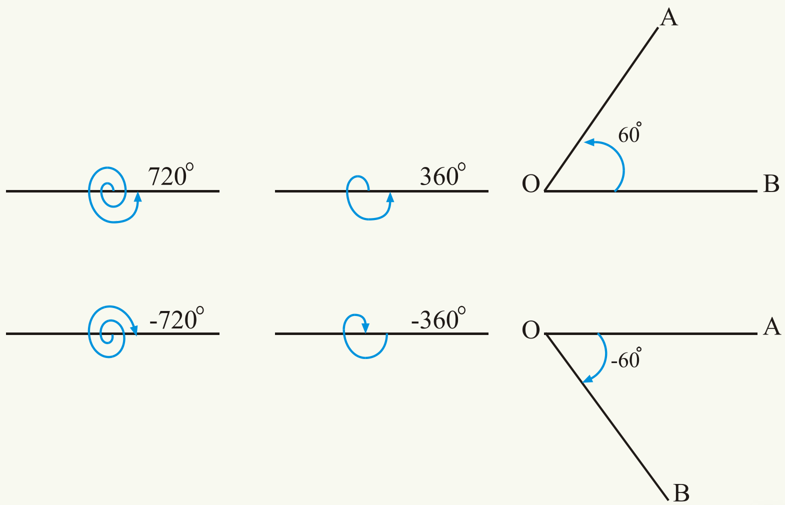
ضلع اول را ضلع ابتدایی (initial side) و ضلع دوم را ضلع نهایی (terminal side) می گویند؛ طوری که در شکل نشان داده شده است:



اگر در شکل نیم‌خط $\overrightarrow{OA}$ را خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت دوران دهیم زاویهٔ θ به دست می‌آید. اگر نیم خط $\overrightarrow{OA}$ را به اندازهٔ 360° (یک دور مکمل) دوران دهیم و دوران را ادامه دهیم تا نیم‌خط $\overrightarrow{OA}$ به موقعیت OB برسد در این صورت، اندازهٔ زاویهٔ تشکیل شده $\theta+360^\circ$ می‌باشد، اگر بعد از دو دور کامل به نقطهٔ B برسیم اندازهٔ زاویهٔ پیموده شده $\theta+720^\circ$ و به همین ترتیب اگر نیم خط $\overrightarrow{OA}$ را K دوران دهیم و به نقطهٔ B برسیم اندازهٔ زاویه $\theta+K\cdot360^\circ$ می‌شود؛ طوری که مشاهده می‌شود در مثلثات زاویه‌های بزرگ‌تر از 360° نیز وجود دارد.



مثال 1: زوایای 60°، -60°، 360°، -360°، 720° و -720° را رسم کنید.



فعالیت

زوایای 45° , 90° , -180° و 180° را رسم کنید.

واحدهای اندازه‌گیری زاویه: زاویه را توسط درجه، گراد و رادیان اندازه می‌کنند.

درجه: $\frac{1}{360}$ حصهٔ یک دوران (Rotation) عبارت از درجه می‌باشد یا $\frac{1}{90}$ حصهٔ یک زاویهٔ قایمه عبارت از درجه است.

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad , \quad 1^\circ = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^\circ = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \quad , \quad (\frac{1}{3600})^\circ = 1''$$

مثال2: $35^\circ\ 15'\ 27''$ را به شکل اعشاری درجه بنویسید و $(48,3625)^\circ$ را به درجه، دقیقه و ثانیه (DMS) تبدیل کنید.

حل

$$35^\circ\ 15'\ 27'' = 35^\circ + (\frac{15}{60})^\circ + (\frac{27}{3600})^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

$$48,3625^\circ = 48^\circ + 0,3625^\circ = 48^\circ + (0,3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21,75)'$$
$$= 48^\circ + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^\circ\ \ 21'\ \ 45''$$

فعالیت

$36^\circ\ 47'\ 12''$ را به درجه تبدیل کنید و $55,967663^\circ$ را به درجه، دقیقه و ثانیه DMS Degree, Minute, Second تبدیل کنید.

گراد: گراد نیز واحد اندازه‌گیری زاویه می‌باشد که $\frac{1}{400}$ حصهٔ یک دوران عبارت از گراد می‌باشد. $\frac{1}{100}$ حصهٔ یک گراد عبارت از دقیقه‌گراد و $\frac{1}{100}$ حصهٔ دقیقه‌گراد عبارت از ثانیه‌گراد می‌باشد.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

تبدیل درجه به گراد و گراد به درجه: می‌توانیم که درجه را به گراد و گراد را به درجه تبدیل نماییم. (یک دوران 360° و یا $400g$ می‌باشد.)

مثال3: 45° را به گراد و $100g$ را به درجه تبدیل کنید.

حل: چون یک دور مکمل 360° یا $400g$ می‌باشد.

همچنین:

$$400g = 360^\circ \qquad 360^\circ = 400g$$

$$1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ \qquad 1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g$$

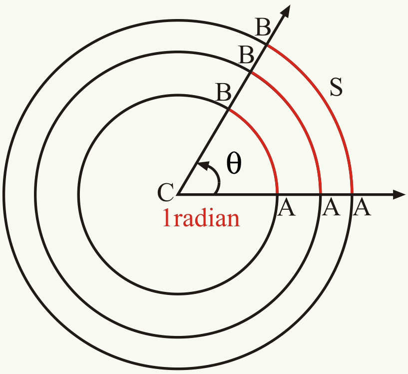
$$100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ \qquad 45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g$$

و یا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

رادیان (Radian): علاوه از درجه و گراد واحد دیگر اندازه‌گیری زاویه عبارت از رادیان می‌باشد. رادیان عبارت از اندازهٔ زاویهٔ مرکزی می‌باشد که طول قوس مقابل آن مساوی به طول شعاع دایره باشد. رادیان در ریاضیات عالی موارد استعمال زیاد دارد، در شکل زاویهٔ مرکزی $A\hat{C}B$ که شعاع دایره r و طول قوس AB مساوی به r است. اندازه $A\hat{C}B$ عبارت از 1 radian می‌باشد.

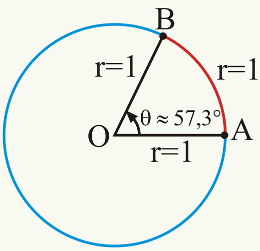


$$A\hat{C}B = 1\,radian = 1^R$$

اگر قوس AB مساوی به شعاع دایره (r) باشد θ به حسب رادیان مساوی است به:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \quad \text{و یا} \quad s = r\theta$$

در دایرهٔ مثلثاتی یا دایرهٔ واحد (Unite Circle) که شعاع آن واحد طول و مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع باشد، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی بر حسب رادیان مساوی به طول قوس مقابل می‌باشد.



$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad radian$$

چون محیط دایره $C = 2\pi r$ است، پس $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \ \ radian$ بدین‌معنی که یک دور مکمل 360° و یا $2\pi^{R}$ می‌باشد.

$$2\pi^{R} = 360^{\circ}$$

$$1^{R} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = \frac{180^{\circ}}{3{,}14159} \approx (57{,}29578)^{\circ} \approx 57^{\circ}\ 17'\ 45'' \approx (57{,}3)^{\circ}$$

$$1^{\circ} = \frac{2\pi}{360^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \approx \frac{3{,}14159}{180} \approx 0{,}01745 \ Radian$$

مثال 4: طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{3}\ radian$ را معلوم کنید؛ اگر قطر دایره $30m$ باشد.

حل: چون $\frac{30m}{2} = 15m = \frac{d}{2} = r$ می‌باشد.

$$s = r \cdot \theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi m \approx 15.7m$$

فعالیت

طول قوس مقابل یک زاویهٔ مرکزی $1Rad$ چند سانتی متر می‌باشد، اگر شعاع دایره $10cm$ باشد؟

تبدیل درجه و گراد به رادیان و تبدیل رادیان به درجه و گراد

چون $360^{\circ} = 400g = 2\pi^{R}$ می‌باشد.

$\frac{R}{2\pi} = \frac{g}{400} = \frac{d}{360^{\circ}}$ و یا $\frac{R}{\pi} = \frac{g}{200} = \frac{d}{180}$ می‌باشد.

و یا

$$360^{\circ} = 2\pi^{R}$$

$$1^{\circ} = (\frac{2\pi}{360})^{R} = (\frac{\pi}{180})^{R}$$

به همین ترتیب چون: $2\pi^R = 360^\circ$

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^\circ = (\frac{180}{\pi})^\circ$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

مثال5: زوایای 75° , 220° , -400° , $-100g$ و 40° را به رادیان تبدیل کنید.

چون $1^\circ = (\frac{\pi}{180})^R$ است؛ پس:

$$220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain}, \qquad 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain}$$

$$40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian} \qquad -400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain}$$

چون یک دور مکمل $2\pi^R$ و یا $400g$ می‌باشد؛ پس:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

سؤال: اگر از اندازهٔ زاویه‌یی بر حسب گراد 30واحد کم کنیم، عدد حاصل برابر اندازهٔ زاویه بر حسب درجه خواهد بود. اندازهٔ این زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian}$$

زاویهٔ مطلوب $\frac{3\pi}{2}$ رادیان می‌باشد.

مثال6: a: $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ و 6π رادیان را به درجه تبدیل کنید.

b- $\frac{1}{4}$ حصه یک دوران (Revolution) چند رادیان می‌شود؟

حل

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

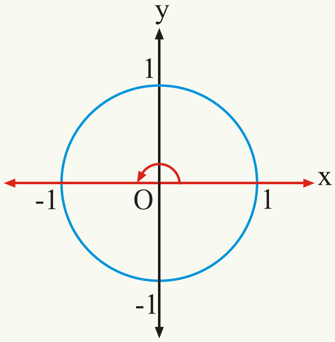
$$a: \left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

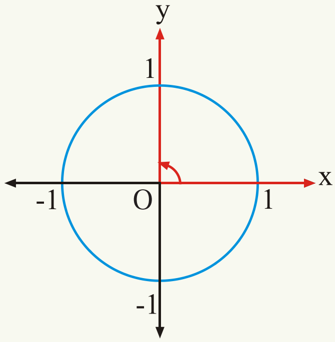
$$b: = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\,\text{radian}$$

اشکال زیر را مشاهده کنید.

$\frac{1}{2}$ Rev , $\frac{1}{4}$ Rev

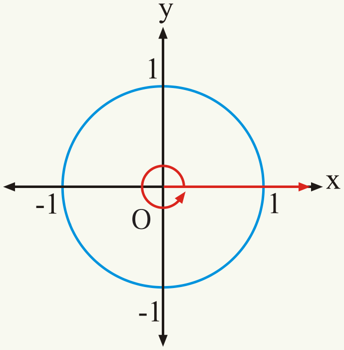
$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$, $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radian

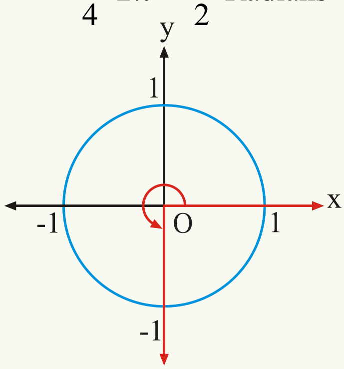




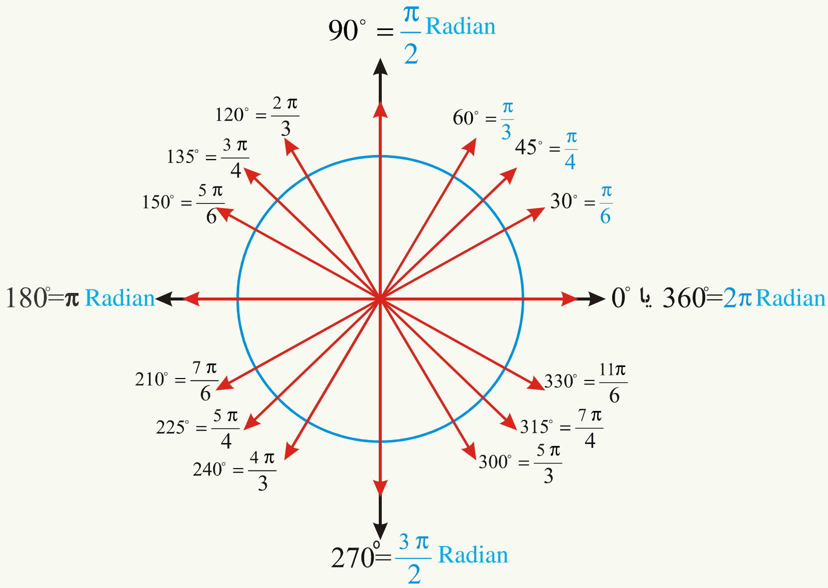
1 Revolution , $\frac{3}{4}$ Revolution

2 π Radians , $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





غرض وضاحت بیشتر ارتباط بین درجه و رادیان شکل زیر را نیز مشاهده کنید.



فعالیت

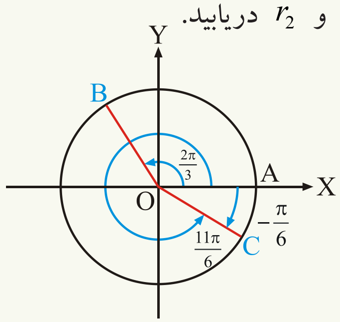
زوایای $\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{5\pi}{4}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

مثال 7:

(a) زاویه‌های $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ را درشکل نشان دهید.

(b) در شکل چرخ بزرگ و کوچک نشان داده شده‌اند؛ اگر مقدار زوایای θ_1 و θ_2 بر حسب رادیان باشد مقدار زاویهٔ θ_2 را از جنس θ_1 ، r_1 و r_2 دریابید.

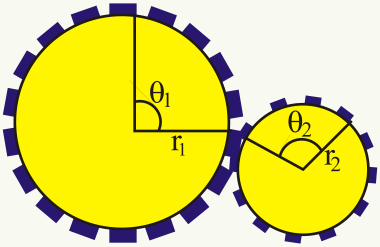
حل: (a)



از شکل مشاهده می‌شود که اضلاع دوم زوایای $\frac{11\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ با هم منطبق اند.

حل: (b)

$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$



مثال8: مقدار زاویهٔ مثبت را به رادیان دریابید، درصورتی‌که ثانیه‌گرد ساعت 40 ثانیه دوران کرده باشد.

حل: چون 60 ثانیه یک دور مکمل یا 2π رادیان می‌شود، پس $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} \text{Rev}$ است و

چون یک دوران 2π *Radian* می‌باشد، پس $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

و نیز برای یافتن زاویه در بین دو عقربهٔ ساعت از فورمول $\theta = |5{,}5\min - 30\text{hr}|$ استفاده کرده می‌توانیم؛ طور مثال: در ساعت 3 و 40 دقیقه، زاویه بین عقربهٔ ساعت‌گرد و دقیقه‌گرد چند درجه است؟

$$\theta = |5{,}5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

تمرین

1- اگر قوس مقابل یک زاویهٔ مرکزی 50cm و شعاع دایره 25cm باشد، زاویهٔ مرکزی چند رادیان می‌شود؟

2- $32{,}4222^\circ$ را به درجه، دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

3- $\frac{1}{8}$ حصهٔ یک دوران چند رادیان، چند درجه و چند گراد می‌شود؟

4- $\frac{5\pi}{4}$ رادیان چند گراد و $-7{,}5^\circ$ چند رادیان می‌شود؟

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ و 45° را به رادیان و گراد تبدیل کنید.

6- معلوم کنید که $\frac{1}{9}$، $\frac{1}{24}$، $\frac{1}{18}$ و $\frac{4}{5}$ حصهٔ یک دایره (یک دوران) چند رادیان و چند درجه می‌شود؟

7- $\frac{11\pi}{3}$، $\frac{9\pi}{4}$، $\frac{\pi}{6}$، $-\frac{\pi}{6}$، $-\frac{\pi}{10}$، $\frac{2\pi}{5}$ و $-\frac{5\pi}{12}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

8- اگر طول ثانیه‌گرد یک ساعت 6cm باشد، در 40 ثانیه، ثانیه‌گرد چند سانتی‌متر فاصله را طی می‌کند؟

9- اگر شعاع دایره 3cm و زاویهٔ مرکزی $\frac{5}{3}$ رادیان باشد طول قوس مقابل این زاویهٔ مرکزی چند سانتی است؟

10- اگر گردش ثانیه‌گرد یک ساعت 35 ثانیه باشد، ثانیه‌گرد چند رادیان زاویهٔ مثبت را طی می‌کند؟

11- مجموع دو زاویه 152° است. اگر اندازهٔ یکی از آن‌ها برحسب درجه برابر اندازهٔ دیگری برحسب گراد باشد، اندازهٔ هر زاویه را برحسب رادیان دریابید.

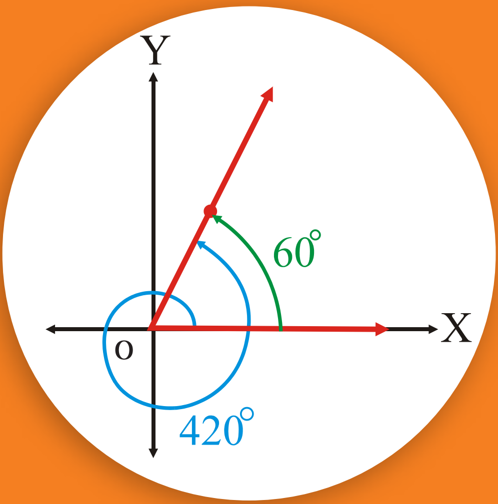
12- 1620° چند رادیان می‌شود؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13- چهار دوران چند رادیان می‌شود؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14- اگر شعاع یک دایره 10m باشد طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی 45 radian چند متر می‌شود؟



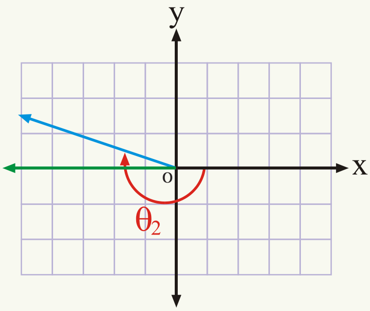
حالت معیاری یک زاویه و زوایای کوترمینل

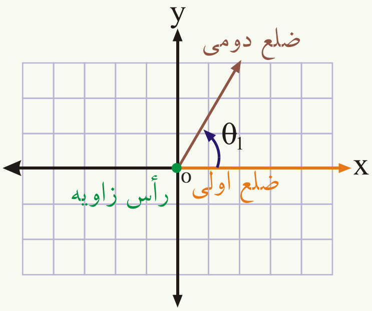
می‌توانید بگویید که: آیا اضلاع دوم زوایای 60° و 420° با هم منطبق اند؟ چرا؟

حالت معیاری یک زاویه (Standard position of an angle)

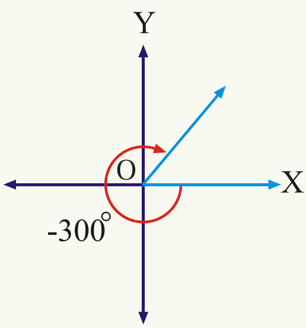
اگر رأس زاویه در مبدأی کمیات وضعیه و ضلع اولی آن بالای جهت مثبت محور X واقع باشد، این زاویه درحالت معیاری می‌باشد.

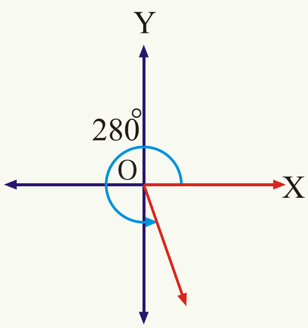
طورمثال: در شکل‌های زیر، زوایای θ_1 و θ_2 در حالت معیاری نشان داده شده‌اند.

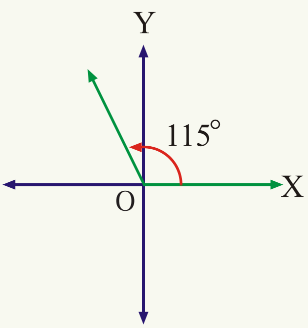




مثال 1: زوایای 115°، 280° و -300° را در حالت معیاری رسم کنید.







در حالت معیاری اگر ضلع دوم یک زاویه بالای محور X و یا محور Y منطبق شود، این زاویه را به نام زاویهٔ ربعی (Quadrantale angle) می‌نامند، مثل زوایای $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ و غیره.

فعالیت

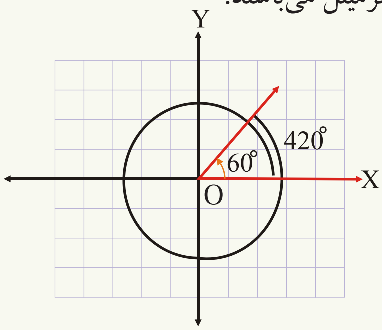
زوایای $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ و -210° رادر حالت معیاری رسم کنید.

زوایای کوترمینل (Conterminal angles)

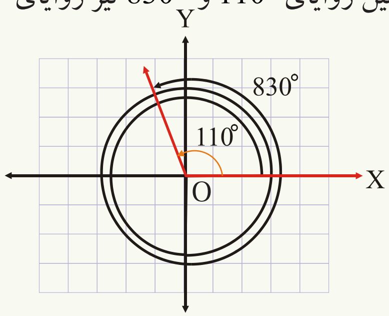
دو یا چند زاویه‌یی که اضلاع دومی‌شان در حالت معیاری با هم منطبق باشند به نام زوایای کوترمینل یاد می‌شوند.

مثال 2: در شکل نشان دهید که زوایای 60° و 420° و همچنین زوایای 110° و 830° که در حالت معیاری واقع‌اند با هم زوایای کوترمینل می‌باشند.

حل: چون در حالت معیاری اضلاع اولی این زوایا با هم منطبق می‌باشند و طوری که در شکل مشاهده می‌شود اضلاع دومی (Conterminal sides) زوایای 60° و 420° نیز با هم منطبق می‌باشند، پس نظر به تعریف، این دو زاویه با هم کوترمینل می‌باشند. همچنین زوایای 110° و 830° نیز زوایای کوترمینل می‌باشند.



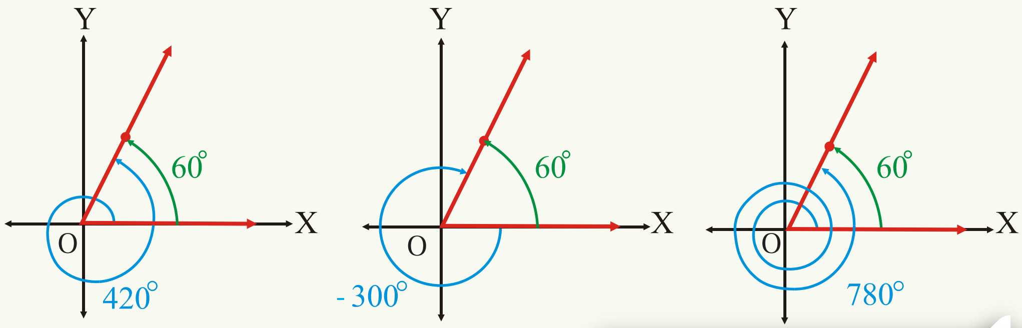
(a)



(b)

مثال 3: در حالت معیاری سه زاویهٔ کوترمینل را با زاویهٔ 60° دریابید و در شکل نیز نشان دهید.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ, \quad 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ, 60^\circ + 2\cdot 360^\circ = 780^\circ$



فعالیت

آیا زاوایای 230° و 590° و نیز زاویهٔ 230° و -130° باهم کوترمنیل اند؟ رسم کنید.

چون زوایای کوترمینل به اندازهٔ یک دور مکمل (360°) یا $2\pi^R$ و یا چند دور $n \cdot 360^\circ$ با هم فرق دارند، پس زوایای کوترمنیل با زاویهٔ θ عبارت اند از:

$\theta + 360^\circ$ ، $\theta + 2\pi$

$\theta + 2 \cdot 360^\circ$ ، $\theta + 2 \cdot 2\pi$

$\theta + 3 \cdot 360^\circ$ ، $\theta + 3 \cdot 2\pi$

----- -----

$\theta + n \cdot 360^\circ$ $\theta + 2n\pi$

مثال 4

(a) چهار زاویهٔ کوترمنیل را با زاویه 30° در یابید.

(b): با زاویهٔ 90° دو زاویهٔ کوترمنیل را دریابید و درشکل نیز نشان دهید.

حل (a)

$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$ یا $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ Radian

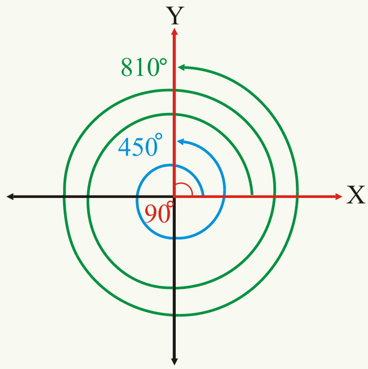
$30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 750^\circ$ یا $\frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6}$ Radian

$30^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 1110^\circ$ یا $\frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6}$ Radian

$30^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 1470^\circ$ یا $\frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6}$ Radian

حل (b)

$90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$ $\quad$ $90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$



مثال5: آیا زوایای $410^\circ, 50^\circ$ و $800^\circ, 80^\circ$ و $-680^\circ, 40^\circ$ و 60° و 410° با هم کوترمینل اند یا خیر؟

حل: چون $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$

پس زوایای 50° و 410° با هم کوترمینل اند و $800^\circ = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ ، پس زوایای 80° و 800° نیز با هم کوترمینل می‌باشند. همچنین $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ زوایای 40° و -680° نیز با هم کوترمینل می‌باشند.

اما: $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$ می‌باشد، پس زوایای 410° و 60° باهم کوترمینل نمی‌باشند.

اگر رأس زاویه در مبدأی کمیات وضعیه و ضلع اولی آن بالای جهت مثبت محور X واقع باشد زاویه درحالت معیاری می‌باشد. اگر در حالت معیاری اضلاع دومی دو، یا چند زاویه با هم منطبق باشند به نام زوایای کوترمینل یاد می‌شوند.

تمرین

1- زوایای $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ و 240° را در حالت معیاری رسم کنید.

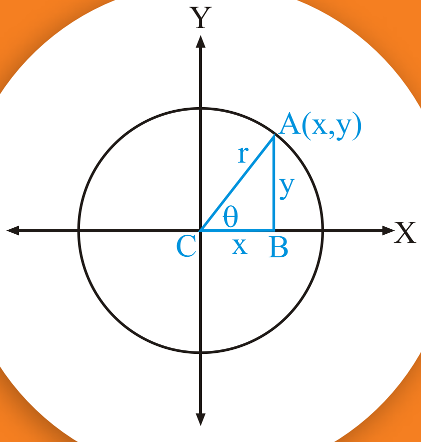
2- کوچکترین زاویهٔ مثبتی را دریابید که با زوایای زیر کوترمینل باشد.

$135^\circ \quad 90^\circ \quad 60^\circ \quad 539^\circ \quad 450^\circ \quad -125^\circ \quad -40^\circ$

3- آیا زوایای (-80° ، 280°) و (35°، 395°) با هم کوترمینل می‌باشند؟

4- شش زاویهٔ کوترمینل را با زاویهٔ 40° دریابید.

5- آیا زوایای $(-930^\circ, 150^\circ)$ و $(180^\circ, 900^\circ)$ با هم کوترمینل اند؟ در شکل نیز نشان دهید.



توابع مثلثاتی
(Trigonometric Fuctions)

آیا گفته می‌توانید که نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ به طول اضلاع θ ارتباط دارد یا خیر؟

می‌دانیم که نسبت‌های مثلثاتی (Trigonometric ratios) یک زاویهٔ حادهٔ (θ) در یک مثلث قایم الزاویه قرار زیر تعریف شده‌اند:

$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

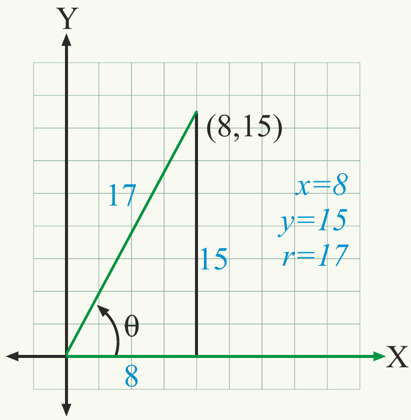
$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x} \qquad \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

در نتیجه، مشاهده می‌شود که $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ و $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ می‌باشند.

مثال 1: اگر در حالت معیاری ضلع دوم زاویهٔ θ از نقطهٔ (8,15) بگذرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را دریابید.

چون نظر به قضیه فیثاغورث $r^2=x^2+y^2$ می‌باشد.



$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \; , \; \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

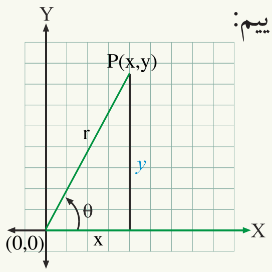
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \; , \; \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

بعضی از رابطه‌های اساسی بین نسبت‌های مثلثاتی زوایا

نظر به قضیهٔ فیثاغورث در شکل داریم که:

$$y^2 + x^2 = r^2 .... \text{I}$$

هر دو طرف را به r^2 تقسیم می‌نماییم:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

اگر اطراف معادلهٔ (I) را به y^2 تقسیم نماییم داریم که:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

اگر اطراف معادلهٔ (I) را بر x^2 تقسیم نماییم:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

از طرف دیگر:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

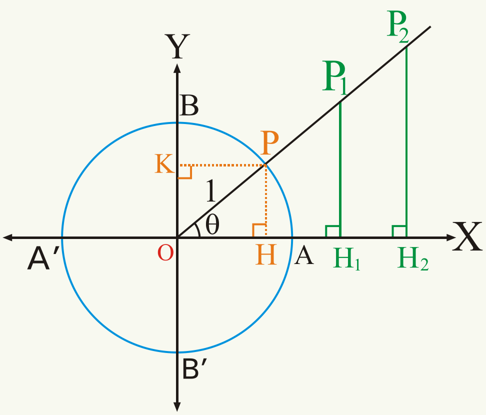
می باشند.

چون این روابط برای هر قیمت θ درست اند از این سبب به نام مطابقت‌های مثلثاتی نیز یاد می‌شوند

فعالیت

اگر در حالت معیاری ضلع دوم θ از نقطهٔ $(12,5)$ بگذرد نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را در یابید.

قیمت‌های فوق توابع مثلثاتی محض به مقدار θ ارتباط دارد و به موقعیت نقطهٔ P که بالای ضلع دوم θ قرار دارد ارتباط ندارد ما می‌توانیم این حقیقت را در شکل به اساس تشابه مثلث‌های $\overset{\Delta}{OPH}$ ، $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ و $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مشاهده کنیم.



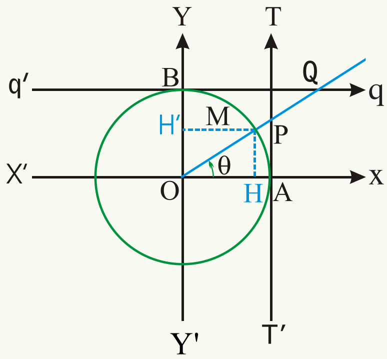
$|OP|=1$

$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$

اگر زاویهٔ θ برحسب رادیان باشد.

متحول مستقل عبارت از θ می‌باشد. $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ و $\csc\theta$ متحول‌های مقید (مربوط) اند، بدین معنی که $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ و csc توابع مثلثاتی‌اند که مقدار آن‌ها به طول اضلاع زاویهٔ θ ارتباط ندارند، بلکه مربوط به مقدار زاویهٔ θ می‌باشد؛ چون دایرهٔ مثلثاتی (Trigonometric Circle) دایره‌یی است که طول شعاع آن واحد طول باشد. در دایرهٔ مثلثاتی که مرکز آن در مبدأی مختصات و محورهای XX' و YY' قطرهای افقی و عمودی دایره می‌باشند.



بنابر قرارداد محور $y'oy$ را محور ساین‌ها و محور $x'ox$ را محور کوساین‌ها می‌نامند. محور TAT' که در نقطهٔ A بر دایره مماس است محور تانجانت و محور $q'Bq$ که در نقطهٔ B بر دایره مماس است محور کوتانجانت نامیده می‌شود. مبدأی محور ساین‌ها و کوساین‌ها مرکز دایره و مبدأی محور تانجانت نقطهٔ A و مبدأی محور کوتانجانت نقطهٔ B است.

اگر از نقطهٔ A در جهت مثبت تا نقطهٔ M حرکت کنیم و زاویهٔ $M\hat{O}A$ را θ بنامیم توابع مثلثاتی زاویهٔ θ به صورت زیر نیز تعریف می‌شود.

$$(r = OM = OA = OB = 1)$$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

بدین لحاظ نسبت‌های مثلثاتی را خطوط مثلثاتی نیز می‌گویند.

به همین ترتیب اگر ضلع دوم زاویهٔ θ و یا انتهای قوس در ربع دوم، سوم یا چهارم باشد

می‌توان نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورد. علامه‌های نسبت‌های مثلثاتی در هر چهار ربع (quadrants) قرار زیر می‌باشد.

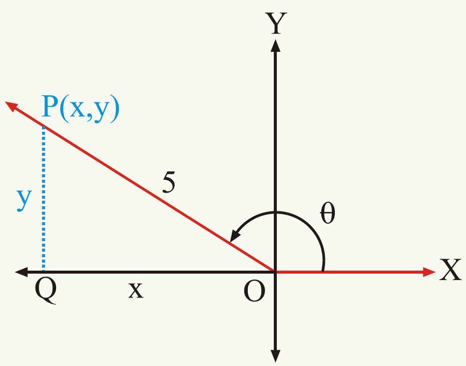
$\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta < 0$	$\sin\theta < 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta < 0$

$\sec\theta, \cos\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sin\theta, \csc\theta$	ربع
+	+	+	I
−	−	+	II
−	+	−	III
+	−	−	IV

مثال2: اگر در حالت معیاری قرار شکل زیر، ضلع دوم زاویهٔ θ در ربع دوم واقع و $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ باشد نسبت‌های مثلثاتی متباقی θ را دریابید.

حل: در اول کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p را معلوم می کنیم. چون $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ است، در ربع دوم قیمت x منفی می‌باشد، پس $x = -3$ و $r = 5$ است. نظر به قضیهٔ فیثاغورث داریم که:

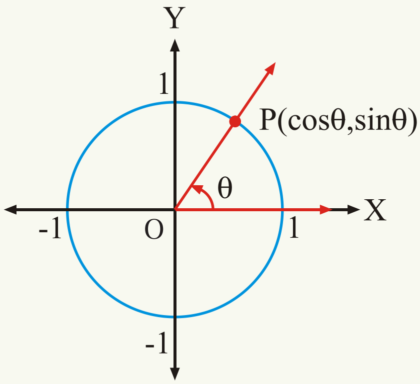
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$



(زیرا که نقطهٔ p در ربع دوم واقع است، $y>0$ می‌باشد)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}\ ،\ \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}\ ،\ \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}\ ،\ \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}\ ،\ \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}$$



چون محور X را محور cos و محور Y را محور sine می‌گویند، ما می‌توانیم در دایرهٔ مثلثاتی کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p را به $P(\cos\theta,\sin\theta)$ و یا $P(x,y)$ نشان دهیم.

توابع مثلثاتی زاویهٔ θ محض به مقدار θ ارتباط دارد، که θ متحول مستقل و نسبت‌های مثلثاتی θ متحولین مقید (مربوط) اند.

در ربع اول تمام نسبت‌های مثلثاتی مثبت، در ربع دوم $\sin\theta$ و $\csc\theta$ مثبت، در ربع سوم $\tan\theta,\cot\theta$ مثبت و در ربع چهارم $\cos\theta,\sec\theta$ مثبت و نسبت‌های دیگر مثلثاتی آن منفی می‌باشند.

تمرین

1- علامه‌های نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را شفاهی بگویید:

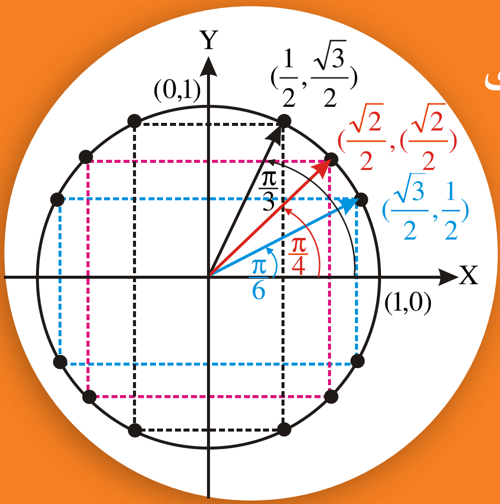
$\sin120^\circ$ $\tan170^\circ$ $\tan60^\circ$ $\cos330^\circ$ $\sec200^\circ$

$\cot271^\circ$ $\csc91^\circ$ $\sin271^\circ$ $\csc181^\circ$ $\csc315^\circ$

2- اگر θ در حالت معیاری به حسب رادیان باشد و ضلع دوم θ از نقاط داده شدهٔ زیر بگذرد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را دریابید.

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

نسبت‌های مثلثاتی بعضی زوایای خاص



آیا می‌توانید بگویید که $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ می‌باشد؟

نسبت‌های مثلثاتی 45°: در یک مثلث قایم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین دو ضلع قایم آن را یک، یک واحد در نظر می‌گیریم.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

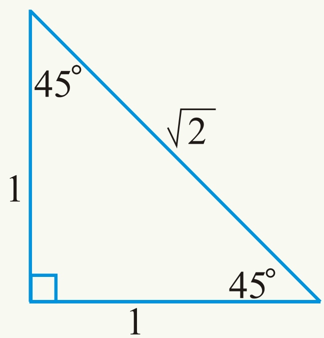
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

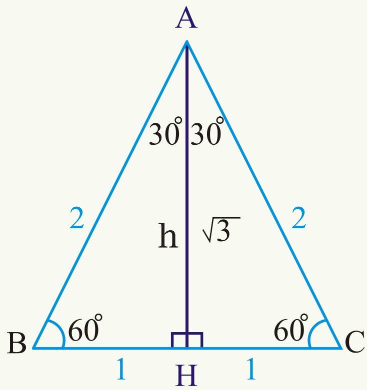


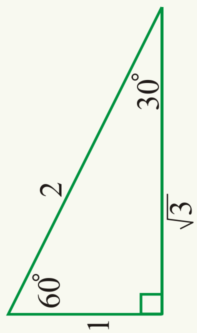
فعالیت

یک مثلث قایم‌الزاویهٔ‌متساوی‌الساقین را در نظر بگیرید که هر ضلع قایم آن b واحد باشد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 45° را به دست آرید.

مثلث متساوی‌الاضلاع $A\overset{\Delta}{B}C$ را که هر ضلع آن 2 واحد باشد در نظر می گیریم، از رأس A ارتفاع AH را رسم می‌نماییم، چون $\hat{A}$ نصف شده که نصف آن مساوی 30° است.

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$
$$h^2 = 4 - 1 = 3$$
$$h = \sqrt{3}$$





$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید که هر ضلع آن a واحد باشد. نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ را دریابید.

همچنین نظر به شکل

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2$$

مشاهده می‌شود؛ چون $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ می‌شود.

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا به صورت عموم هرگاه مجموعهٔ دو زاویه 90° باشد، اگر یک زاویهٔ θ باشد زاویهٔ دیگر $(90^\circ - \theta)$ می‌شود.

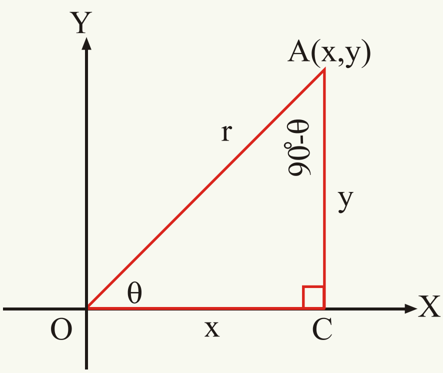
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



فعالیت

به همین ترتیب نشان دهید که: $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$ می‌باشد.

طوری که در مثلثات صنف نهم خوانده‌اید، جدول نسبت‌های مثلثاتی زوایا نیز به همین اساس ترتیب گردیده است.

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 39° داده شده است، نسبت‌های مثلثاتی 51° را دریابید.

$$\sin 39^\circ = 0.6293 \quad , \tan 39^\circ = 0.8098 \quad , \sec 39^\circ = 1.287$$

$$\cos 39^\circ = 0.7771 \quad , \cot 39^\circ = 1.235 \quad , \csc 39^\circ = 1.589$$

حل: چون $39^\circ + 51^\circ = 90^\circ$ می‌شود؛ بنابر آن:

$$\cos 51^\circ = \sin 39 = 0{,}6293 \qquad \sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0{,}7771$$

$$\cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0{,}8098 \qquad \tan 51^0 = \cot 39^\circ = 1{,}235$$

$$\csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1{,}287 \qquad \sec 51^\circ = \csc 39 = 1{,}589$$

تمرین

1 - اگر:

$$\sin 17^\circ = 0{,}2927 \quad \cos 17^\circ = 0{,}9563 \quad \sec 17^\circ = 1{,}046 \quad \csc 17^\circ = 3{,}420$$

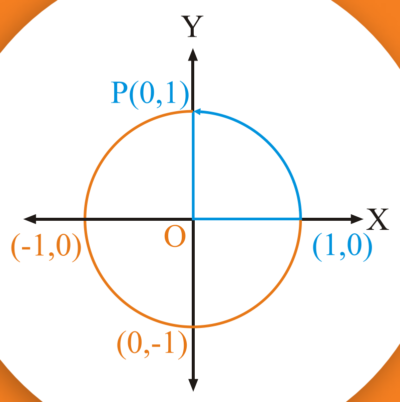
$\cot 17^\circ = 3{,}271$ □ $\tan 17^\circ = 0{,}3057$ باشند، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 73° را دریابید.

2 - کدام‌یک از مساوات زیر درست نیست؟

$$\cos 12^\circ \; 10' \; 20'' = \sin 77^\circ \; 49' \; 40'' \qquad \sin 28^\circ = \cos 62^\circ$$

$$\tan 70^\circ = \cot 20^\circ \qquad \sec 12^\circ = \sec 88^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای
$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°



آیا $\tan 90^\circ$ و $\tan 270^\circ$ تعریف شده‌اند؟

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

چون نقطهٔ $P(0,1)$ روی دایرهٔ مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویهٔ 90° واقع است، بنابرآن:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف نشده است)

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف نشده است)

فعالیت

آیا می‌توانید بگویید که $\cot 0^\circ$ و $\csc 0^\circ$ تعریف نشده‌اند؟ چرا؟

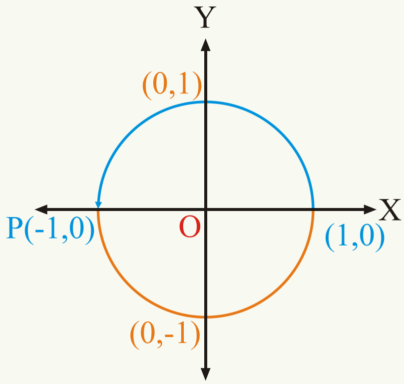
نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 180^o : چون نقطهٔ $p(-1,0)$ روی دایرهٔ مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویه 180° قرار دارد.

پس $r = 1$ $\quad x = -1$ و $y = 0$ می‌باشد.

$$\cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} =$$ (تعریف نشده است)

$$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

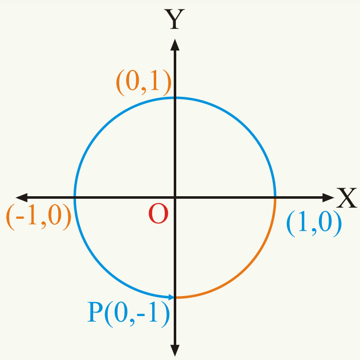


فعالیت

$\sec 180^\circ$ و $\csc 180^\circ$ را دریابید.

نسبت‌های مثلثاتی $\frac{3\pi}{2} = 270^o$:

چون نقطهٔ $P(0,-1)$ روی دایرهٔ مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویهٔ 270^o واقع می‌باشد.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{ (تعریف نشده است)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف نشده است)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

باید به یاد داشته باشید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای 360° و 0° با هم مساوی می‌باشند.
بگویید که چرا؟

نسبت‌های مثلثاتی $2\pi = 360^\circ$:

چون نقطهٔ $P(1,0)$ بالای ضلع دوم زاویهٔ 360° قرار دارد، پس:

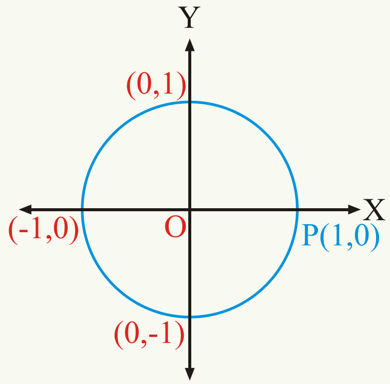
$x=1 \qquad y=0 \qquad r=1$

$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف نه شده است)

$\sec 2\pi = \sec 360^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\csc 2\pi = \csc 360^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف نشده)



فعالیت

تمام نسبت‌های مثلثاتی 0° را دریابید.

زوایای $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360° را زوایای محوری می گویند که دو، دو نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه تعریف نشده‌اند.

تمرین

1- جدول زیر را پر کنید.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^{\circ} = ?$

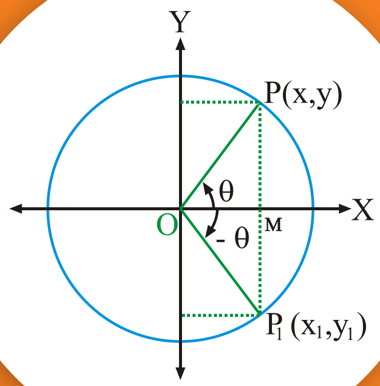
a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف نشده است

3- $\cos 90^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف نشده است

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ است؟ چرا؟

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده با زوایای دیگر



چون در صنف نهم خوانده‌اید که جدول مثلثاتی محض نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مثبت حاده را نشان می‌دهد برای این که نسبت‌های مثلثاتی زوایای منفی و منفرجه را نیز از جدول به دست آورده بتوانیم باید رابطه‌های نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مثبت حاده با نسبت‌های مثلثاتی این زوایا را به دست آوریم.

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\hat{\theta}$ و $-\hat{\theta}$:

زاویهٔ حاده θ مثبت و به اندازهٔ زاویه θ هم جهت حرکت عقربهٔ ساعت زاویه $-\theta$ را در دایره مثلثاتی به حالت معیاری رسم می کنیم.

نقطهٔ $P(x,y)$ بالای ضلع دوم زاویهٔ θ و نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ بالای ضلع دوم زاویهٔ θ واقع اند.

چون دو مثلث $\overset{\Delta}{OMP}$ و $\overset{\Delta}{OMP_1}$ باهم مساوی اند.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

مثال 1: نسبت‌های مثلثاتی $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ را دریابید.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$

فعالیت

نشان دهید که: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$, $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$

مثال 2: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{3\pi}{2}$ را دریابید.

حل

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

چهار نسبت مثلثاتی متباقی زاویهٔ $-\frac{3\pi}{2}$ را در یابید.

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$ $\qquad$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$

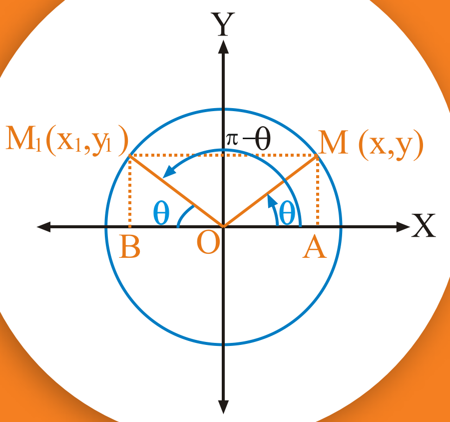
تمرین

1 – نسبت‌های مثلثاتی -360^o یا -2π رادیان را دریابید.

2 – نسبت‌های مثلثاتی -45° یا $-\frac{\pi}{4}$ رادیان و (-30°) و (-60°) را دریابید.

3 – نسبت‌های مثلثاتی -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ رادیان را دریابید.

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه که مجموعه و یا فرق شان π یا 180° باشد.



- آیا نسبت‌های مثلثاتی زوایای 150° و 135° را دریافت کرده می‌توانید؟
- آیا $\sin 135^\circ$ و $\sin 45^\circ$ باهم مساوی می باشند؟ چرا؟
- آیا می‌توانید بگویید که $\sin 130^\circ$ و $\sin 50^\circ$ با هم چه رابطه دارند؟

دو زاویه‌یی که مجموعۀشان π یا 180° باشد، در نظر می گیریم. اگر یک زاویه حاده θ باشد زاویۀ دیگر $(\pi-\theta)$ می‌شود. این دو زاویه را در دایرۀ مثلثاتی به حالت معیاری رسم می‌نماییم.

نقطۀ $M(x,y)$ بالای ضلع دوم زاویۀ θ و نقطۀ $M_1(x_1,y_1)$ بالای ضلع دوم زاویۀ $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ قرار دارند.

چون دو مثلث $\overset{\Delta}{OAM}$ و $\overset{\Delta}{OM_1B}$ با هم مساوی اند.

$(r=1)$

$$(r=1) \quad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \quad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

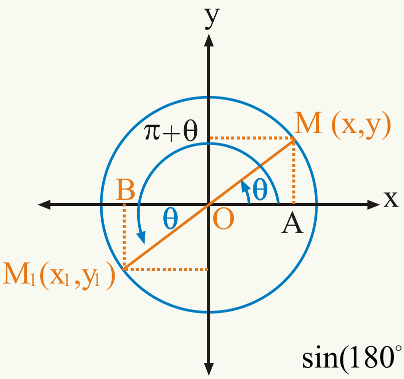
$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- سه نسبت مثلثاتی متباقی زاویۀ $(\pi-\theta)$ را دریابید.

ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌یی‌که فرق‌شان 180° و یا π رادیان باشد.



اگر زاویهٔ حاده θ باشد زاویهٔ دیگری $(\pi+\theta)$ می‌باشد. نقطهٔ $M(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی بالای ضلع دوم زاویهٔ θ و نقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ بالای ضلع دوم زاویه $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ قرار دارد.

چون مثلث‌های $O\hat{A}M$ و $O\hat{B}M_1$ با هم مساوی اند، پس: $y_1=-y$, $x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

مثال 1: نسبت‌های مثلثاتی زوایای 120° و 240° را دریابید.

حل

$$\sin120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

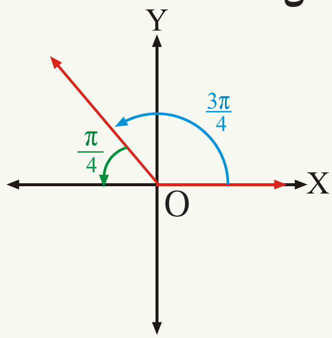
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

سه، سه نسبت متباقی زوایای 120° و 240° را دریابید.

مثال 2: $\sin$، $\cos$ و $\tan$ زاویهٔ $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{3}$ رادیان را در یابید.

حل

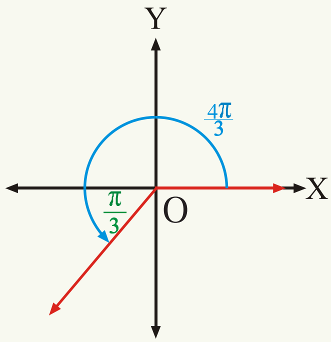


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

چون ضلع دوم زاویهٔ $(180^\circ - \theta)$ در ربع دوم قرار دارد، در ربع دوم $\sin\theta$ و $\csc\theta$ مثبت و متباقی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $(180^\circ - \theta)$ منفی می‌باشند، وچون ضلع دوم زاویهٔ

$(180+\theta)$ یا $(\pi+\theta)$ در ربع سوم واقع است $\tan\theta$ و $\cot\theta$ مثبت و متباقی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $(180+\theta)$ منفی می‌باشند.

تمرین

1- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 225° را دریابید.

2- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 210° را دریابید.

3- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 150° را دریابید.

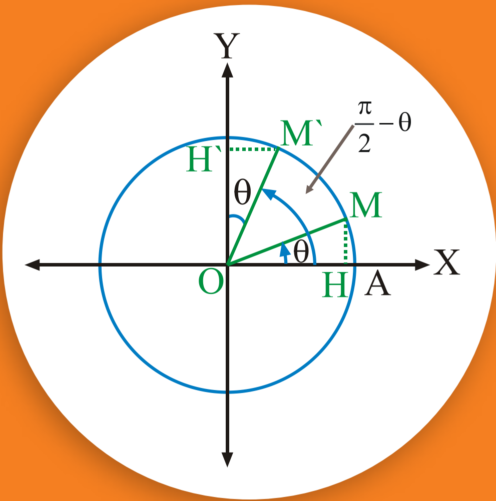
4- $\cot\frac{3\pi}{4}=?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ)=?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌یی که مجموعه‌شان 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان باشد



• آیا $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ می‌باشد؟ چرا؟

• نسبت‌های مثلثاتی زوایای 150° و 60° باهم چه ارتباط دارند؟

زاویهٔ $A\hat{O}M$، θ و زاویهٔ $A\hat{O}M'$ عبارت از زاویهٔ $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ می‌باشد که مجموعهٔ θ و $\frac{\pi}{2}-\theta$ مساوی 90° یا $\frac{\pi}{2}$ می‌شود؛ چون دو مثلث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OH'M'}$ باهم مساوی اند.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

نشان دهید که $\csc(90-\theta) = \sec\theta$, $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ می‌باشد.

مثال 1: اگر:

$$\sin 23^\circ = 0,3907 \qquad \cos 23^\circ = 0,9205 \qquad \tan 23^\circ = 0,4245$$

$$\cot 23^\circ = 2,356 \qquad \sec 23^\circ = 1,086 \qquad \csc 23^\circ = 2,559$$

باشند، نسبت‌های مثلثاتی 67° را دریابید.

حل

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$$

$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$$

$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356 \qquad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$$

فعالیت

اگر

$$\sin 8^\circ \ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^\circ \ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^\circ \ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^\circ \ 10' = 6.968$$

$$\sec 8^\circ \ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^\circ \ 10' = 7.040$$

باشد نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $81^\circ \ 50'$ را دریابید.

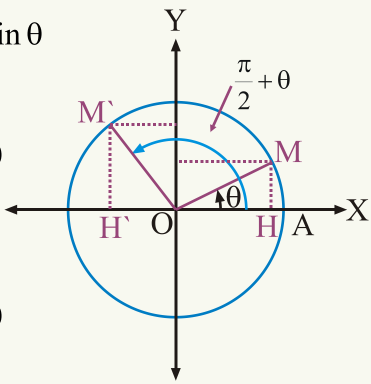
رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که فرق شان $\frac{\pi}{2}$ رادیان یا 90° باشد:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

مثال2: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 120° را دریابید.

حل

$$\sin 120^{\circ}=\sin(90^{\circ}+30^{\circ})=\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{\circ}=\cos(90^{\circ}+30^{\circ})=-\sin 30^{\circ}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^{\circ}=\tan(90^{\circ}+30^{\circ})=-\cot 30^{\circ}=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^{\circ}=\cot(90^{\circ}+30^{\circ})=-\tan 30^{\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^{\circ}=\sec(90^{\circ}+30)=-\csc 30^{\circ}=-2$$

$$\csc 120^{\circ}=\csc(90^{\circ}+30)=\sec 30^{\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

تمرین

1- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 135° را دریابید.

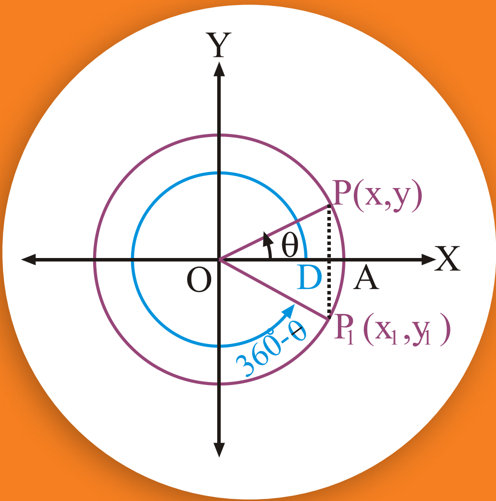
2- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 150° را دریابید.

3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$



رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که مجموعه یا فرق شان 360° یا 2π رادیان باشد:

آیا صحت رابطه $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ را نشان داده می‌توانید؟

از تساوی دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}D$ و $O\overset{\Delta}{P_1}D$ داریم که:

$x_1=x \qquad |y_1|=|y|$

$-y_1=y\Rightarrow y_1=-y$

$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$

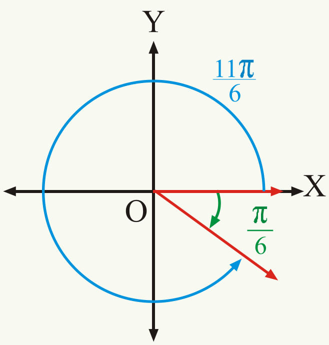
$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$

$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

به همین ترتیب، رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $\sec,\cot$ و $\csc$ زاویه‌های θ و $360^\circ-\theta$ را دریابید و با ارتباط نسبت‌های مثلثاتی زوایای θ و $-\theta$ مقایسه کنید.

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ رادیان را دریابید.



حل

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

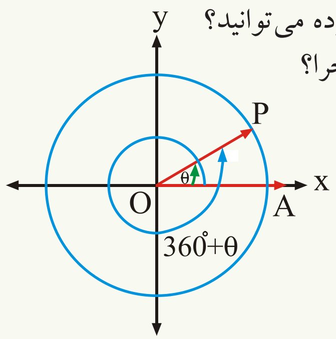
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 315° را دریابید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای کوترمینل

- آیا $\sin 450^\circ$, $\tan 390^\circ$ □ $\csc 405^\circ$ را دریافت کرده می‌توانید؟
- آیا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ و $\sin 790^\circ$ باهم برابر اند؟چرا؟



در حالت معیاری اضلاع دوم زوایای حادهٔ θ و $360^\circ+\theta$ با هم منطبق اند؛ پس:

$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$

مثال1: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 405° را دریابید.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

مثال2: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 1500° را دریابید.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال3: sin ، cos و tan زوایای 900° و -930° را دریابید.

حل

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

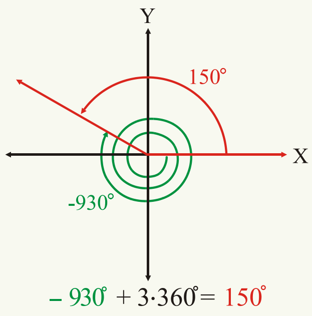
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

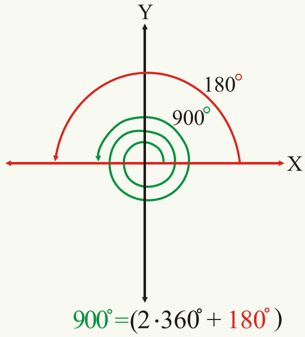
$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$





مثال4: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{5\pi}{2}$ و $\frac{7\pi}{3}$ را دریابید.

حل

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف نشده

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

فعالیت

دو، دو نسبت مثلثاتی متباقی زاوایای $\frac{7\pi}{3}$ و $(-\frac{5\pi}{2})$ را دریابید.

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(360^{\circ} - \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(360^{\circ} - \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(360^{\circ} - \theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(2\pi - \theta) = \cot(360^{\circ} - \theta) = -\cot\theta$$
$$\sec(2\pi - \theta) = \sec(360^{\circ} - \theta) = \sec\theta$$
$$\csc(2\pi - \theta) = \csc(360^{\circ} - \theta) = -\csc\theta$$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin(360^{\circ} + \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(2\pi + \theta) = \cos(360^{\circ} + \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2\pi + \theta) = \tan(360^{\circ} + \theta) = \tan\theta$$
$$\cot(2\pi + \theta) = \cot(360^{\circ} + \theta) = \cot\theta$$
$$\sec(2\pi + \theta) = \sec(360^{\circ} + \theta) = \sec\theta$$
$$\csc(2\pi + \theta) = \csc(360^{\circ} + \theta) = \csc\theta$$

تمرین

1- نسبت‌های مثلثاتی زوایای 480° و 390° را دریابید.

2- نسبت‌های مثلثاتی زوایای 600° و 300° را دریابید.

3- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 1830° و $(1095^\circ\ 20')$ را دریابید.

4- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{25\pi}{6}$ رادیان را دریابید.

5- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{5\pi}{3}$ رادیان را دریابید.

6- نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ رادیان را دریابید.

7- نسبت‌های مثلثاتی زوایای -300°, 780° و 420° را دریابید.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

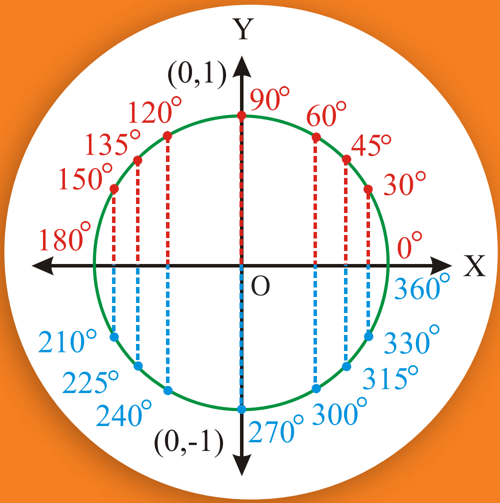
a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) هرسه درست نیست.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



گراف توابع مثلثاتی

- آیا می‌توانید بگویید که دورهٔ تناوب توابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ چقدر است؟
- آیا می‌توانید بگویید که domain توابع $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ کدام اعداد اند؟

رسم گراف تابع $f(x)=\sin x$: **(graph of the sine function)**

ساحهٔ تعریف (domain) تابع $f(x)=\sin x$ ست تمام اعداد حقیقی و Range آن $[-1,1]$ می‌باشد، دورهٔ تناوب این تابع 2π است، زیرا طوری که می‌دانید ساحهٔ تعریف یک تابع تمام اعداد حقیقی (Real Numbers) می‌باشد که تابع در آن تعریف شده باشد. برای هر عدد حقیقی x یک زاویهٔ x رادیان و نقطهٔ تقاطع ضلع دُوم زاویهٔ x رادیان با دایرهٔ مثلثاتی هر وقت تعریف شده است؛ اگر x برحسب رادیان باشد تمام اندازه‌های این زوایا $x+2k\pi$ رادیان است؛ بنابراین ساحهٔ تعریف توابع $\sin e$ و $\cos ine$ ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد.

چون $\sin x$ و $\cos x$ کمیات وضعیهٔ یک نقطه بالای دایرهٔ مثلثاتی می‌باشد، پس Range توابع $f(x)=y=\sin x$ و $f(x)=y=\cos x$ در بین 1 و (-1) می‌باشد یا انتروال $[-1,1]$ عبارت از Range توابع $y=\sin\theta$ و $y=\cos\theta$ می‌باشد.

فعالیت

نشان دهید که $-1\le \sin\theta,\cos\theta\le 1$ می‌باشد.

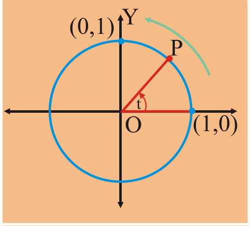
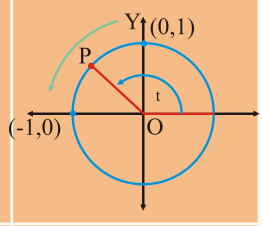
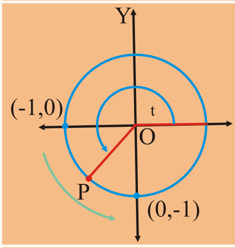
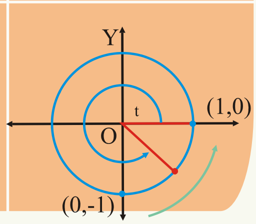
به یاد داشته باشید که تابع f را متناوب می‌گویند، در صورتی که عدد t خلاف صفر باشد به شرطی که $x\in D_F$ باشد $x+t$ و $x-t$ نیز در ساحهٔ تعریف (domain) تابع f شامل بوده و $f(x+t)=f(x)$ باشد.

کوچکترین عدد t که در رابطه $f(x+t)=f(x)$ صدق کند. عدد (t) به نام تناوب اصلی

تابع f نامیده می‌شود؛ اگر t دورۀ تناوب تابع f باشد t- نیز دورۀ تناوب تابع f می‌باشد؛ طوری که می‌دانید $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ و $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ می‌باشد که k یک عدد تام است، بنابرآن توابع $\sin x$ و $\cos x$ توابع متناوب بوده و کوچکترین عدد مثبتی که در رابطه‌های فوق صدق می‌کند 2π است، لذا تناوب اصلی این دو تابع 2π است.

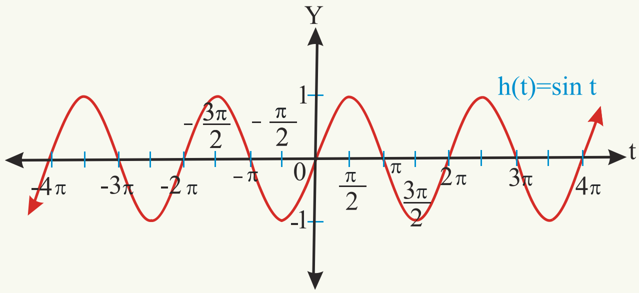
مطابق شکل $\hat{t}$ رادیان را در حالت معیاری در نظر بگیرید؛ طوری که در نقطۀ P ضلع دوم زاویۀ t دایرۀ مثلثاتی را قطع می‌کند؛ پس مختصۀ y نقطۀ p عبارت از sin t می‌باشد.

$h(t)=\sin t$ تغییرات t و $\sin t$ تابع را در جدول و شکل زیر مشاهده کنید.

گراف مربوطه	sin t	حرکت نقطه P	تغییر در قیمت t
	از صفر الی یک تزاید می کند	از (1,0) الی (0,1)	از 0 الی $\frac{\pi}{2}$
	از یک الی صفر تناقص می کند	از (0,1) الی (−1,0)	از $\frac{\pi}{2}$ الی π
	از صفر الی -1 تناقص می کند	از (−1,0) الی (0,−1)	از π الی $\frac{3\pi}{2}$
	از 1 - الی صفر تزاید می کند	از (0,−1) الی (1,0)	از $3\frac{\pi}{2}$ الی 2π

به همین قسم در هر 2π تکرار می‌شود.در نتیجه $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ می‌باشد.
جدول و شکل زیر را مشاهده کنید:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

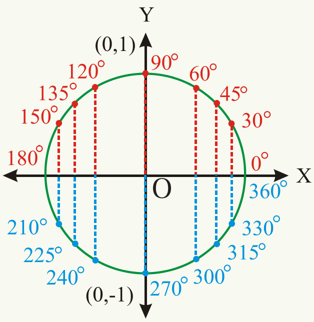


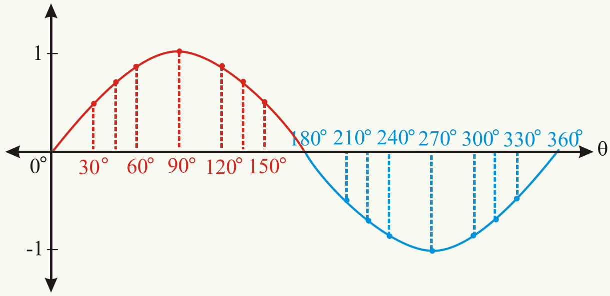
می توانیم با نشان دادن زوایای یک دور برحسب درجهٔ تغییرات sin t را در جدول وشکل زیر نشان دهیم:

$h(t) = \sin t$

t	واقعی	تقریبی
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00





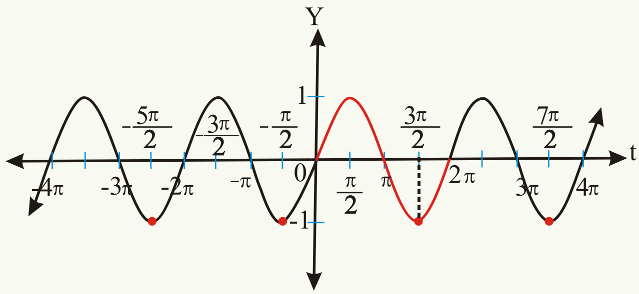
با توجه به این که دورهٔ (پریود) تناوب تابع $\sin t$ عبارت از 2π می‌باشد $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$ گراف تابع $\sin t$ در انتروال‌های $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ و ... یکسان می‌باشد.

فعالیت

قیمت تابع $\sin t$ را در $4\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi$ و -4π معلوم کنید.

مثال 1: تمام قیمت‌های t که در آن $\sin t$ قیمت -1 دارد نشان دهید.

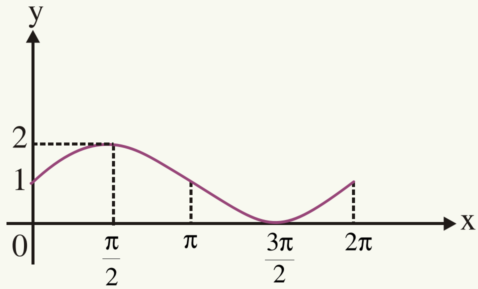
حل: چون قیمت $\sin t$ در بین (1) و (-1) واقع می‌باشد و در هر 2π بالای محور افقی تکرار می‌شود، پس قیمت‌های بی‌شمار وجود دارند که در آن قیمت $\sin t$ عدد -1 می‌باشد؛ طور نمونه: چند نقطه در شکل به رنگ سرخ نشان داده شده است.



درگراف $\sin t$ از 0 الی 2π فقط یک نقطه $(\frac{3\pi}{2},-1)$ وجود دارد که به رنگ سرخ نشان داده شده است. تمامی قیمت‌هایی که در آن $\sin t$ مساوی به -1 می‌باشد عبارت از

$t = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ که K یک عدد تام است.

مثال2: گراف تابع $y = \sin x + 1$ را در انتروال $[0,2\pi]$ رسم کنید.



حل: ناحیهٔ تعریف این تابع $[0,2\pi]$ و Range تابع $[0,2]$ می‌باشد. برای رسم گراف این تابع کافی است که گراف $y = \sin x$ را رسم کرده و آن را به اندازهٔ یک واحد بالای محور y به سمت بالا انتقال دهیم. (انتقال عمودی)

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1 ↗	2 ↘	1 ↘	0 ↗	1

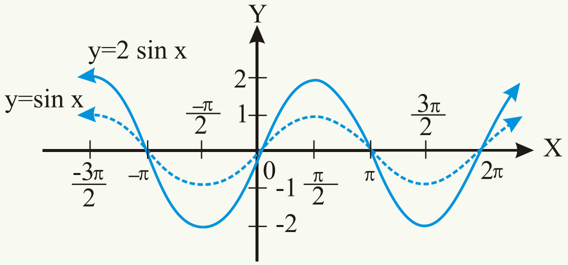
پریود و دامنهٔ (Amplitude) توابع sine و cosine: اگر $b > 0$ باشد گراف‌های $f(t) = \sin bt$ □ $g(t) = \cos bt$ در بین 0 و 2π یک دوره (cycle) را می‌سازد و پریود هر دو تابع $\frac{2\pi}{b}$ می‌باشد؛ ($b > 0$) به طور مثال: پریود تابع $y = \cos 3t$ عبارت است از $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ و پریود تابع $y = \sin\frac{1}{2}t$ عبارت است از $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ می‌باشد؛

و دامنهٔ توابع $y = a\sin bt$ □ $y = a\cos bt$ عبارت از $|a|$ ($a \neq 0$) می‌باشد؛ طور مثال: پریود تابع $y = -2\sin 4t$ عبارت است از $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ و دامنهٔ آن $|a| = |-2| = 2$ می‌باشد.

مثال3: گراف تابع $y = 2\sin x$ را رسم و با گراف تابع $y = \sin x$ مقایسه کنید.

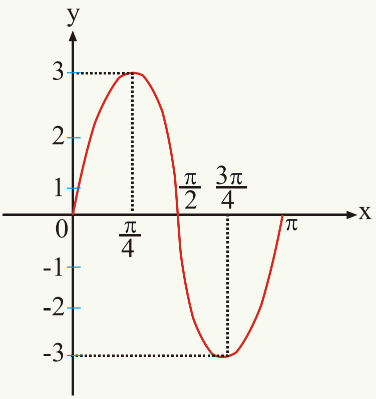
حل: فرق گراف این تابع با تابع $y = \sin x$ این است که $-2 \le y \le 2$ می‌باشد که عدد 2 را دامنه می‌گویند، زیرا که $|2| = 2$ است و پریود این تابع نیز 2π می‌باشد.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



مثال 4: گراف تابع $y = 3\sin 2x$ را در انتروال $[0,\pi]$ ترسیم نمایید.

حل: پریود این تابع $\frac{2\pi}{2} = \pi$ می‌باشد و دامنهٔ آن $|3| = 3$ است. جدول و شکل زیر را مشاهده کنید.



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

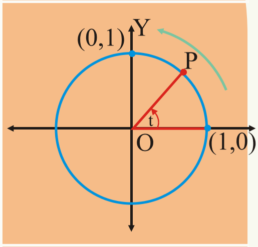
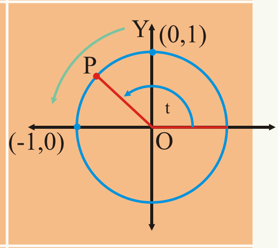
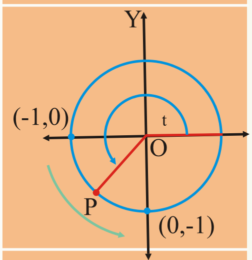
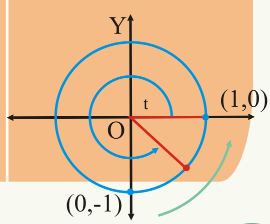
ناحیهٔ تعریف تابع $\sin t$ ست تمام اعداد حقیقی بوده، گراف تابع $\sin t$ محور y را در (0.0) و محور x را نیز در نقاط (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... و $-\pi$، -2π، -3π، -4π وغیره قطع می کند و تابع $\sin t$ از 0 الی $\frac{\pi}{2}$ متزاید و از $\frac{\pi}{2}$ الی π متناقص از π الی $\frac{3\pi}{2}$ متناقص و از $\frac{3\pi}{2}$ الی 2π متزاید می‌باشد.

گراف تابع $f(t) = \cos t$ (Graph of the cosine function)

ناحیهٔ تعریف (domain) این تابع نیز ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد و Range آن

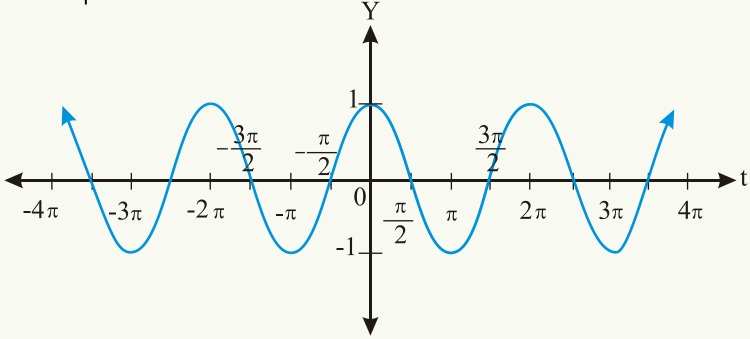
$[-1,1]$ و دورهٔ تناوب (پریود) تابع $\cos x$ نیز 2π می‌باشد.

مطابق شکل، یک زاویهٔ $\hat{t}$ رادیان را در حالت معیاری (Standard Position) در نظر بگیرید که ضلع دوم زاویه $\hat{t}$ دایرهٔ مثلثاتی را در نقطهٔ p قطع کند، پس مختصهٔ x نقطهٔ p عبارت از cos t می‌باشد، برای ترسیم گراف تابع $f(t)=\cos t$ اشکال و جدول زیر را مشاهده کنید.

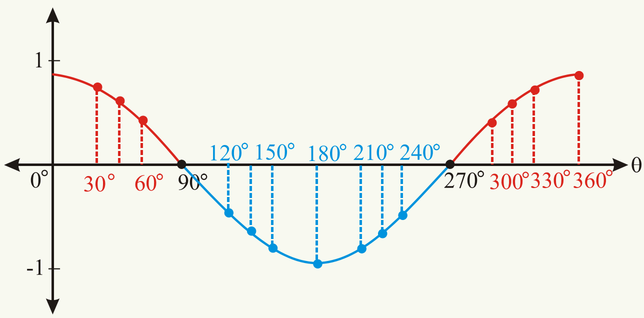
شکل مربوطه	cos t یا مختصه x نقطهٔ p	حرکت نقطه P	تغییر در قیمت t
	از یک الی صفر تناقص می کند	از $(1,0)$ الی $(0,1)$	از 0 الی $\frac{\pi}{2}$
	از صفر الی 1- تناقص می کند	از $(0,1)$ الی $(-1,0)$	از $\frac{\pi}{2}$ الی π
	از 1- الی صفر تزاید می کند	از $(-1,0)$ الی $(0,-1)$	از π الی $\frac{3\pi}{2}$
	از صفر الی 1 تزاید می کند	از $(0,-1)$ الی $(1,0)$	از $3\frac{\pi}{2}$ الی 2π

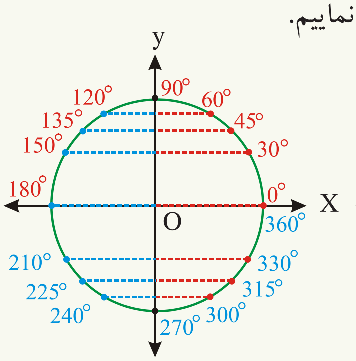
به همین قسم در هر 2π تکرار می‌شود. در نتیجه $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ جدول و شکل زیر را مشاهده کنید:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1	0	-1	0	1



می توانیم برحسب درجهٔ گراف، تابع $f(t) = \cos t$ را نیز رسم نماییم.





دورهٔ تناوب (پریود) تابع $f(t) = y = \cos t$ عبارت از 2π می‌باشد، زیرا که گراف تابع $\cos t$ در انتروال $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ و $[-2\pi,0]$ و غیره یکسان می‌باشد.

ناحیهٔ تعریف تابع $\cos t$ ست اعداد حقیقی بوده و Range یا قیمت y آن در بین 1- و 1 می‌باشدیا انتروال $[-1,1]$، Range تابع $\cos t$ می‌باشد.

$f(t) = \cos t$

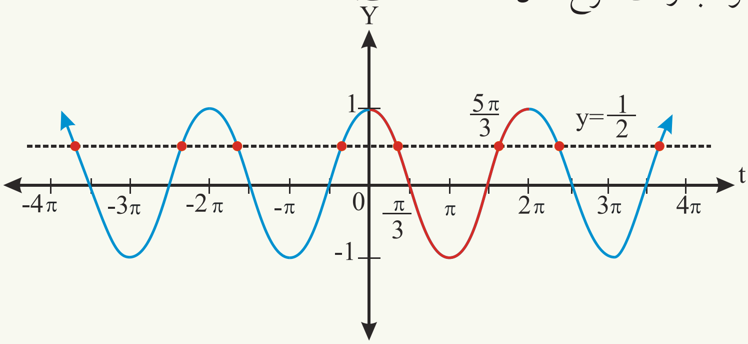
t	واقعی	تقریبی
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

در کدام قیمت‌ها گراف تابع $g(t) = \cos t$ محور y را قطع می کند؟

مثال 1: تمامی قیمت‌های t را نشان دهید که در آن قیمت تابع $\cos t$ مساوی به $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: چون زوایای بی شماری موجود می‌باشد که در آن $y = \cos t = \frac{1}{2}$ می‌باشد، در شکل چند نقطه طور نمونه به رنگ سرخ نشان داده شده است.



در انتروال $[0,2\pi]$ دو نقطه وجود دارد که $\cos t=\frac{1}{2}$ می‌شود و عبارت از $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ و $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ می‌باشند. تمامی قیمت‌هایی که در آن $\cos t=\frac{1}{2}$ می‌باشد عبارت اند از:

$t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ که k یک عدد تام است.

ناحیهٔ تعریف توابع sin و cos ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد، تابع $y=\cos t$ از 0 الی $\frac{\pi}{2}$ متناقص و از $\frac{\pi}{2}$ الی π نیز متناقص بوده، اما از π الی $\frac{3\pi}{2}$ متزاید بوده و از $\frac{3\pi}{2}$ الی 2π این تابع نیز متزاید می‌باشد، پریود توابع $y=\sin t$ و $y=\cos t$، 2π می‌باشد بدین معنی که:

$\sin(t\pm2\pi)=\sin t \ , \ \cos(t\pm2\pi)=\cos t$ می‌باشند.

تابع $f(t)=\sin t$ یک تابع تاق و $f(t)=\cos t$ تابع جفت می‌باشد؛ زیرا:

$\sin(-t)=-\sin t$ و $\cos(-t)=\cos t$ می‌باشد.

یا گراف تابع sin t نظر به مبدأ متناظر و گراف تابع cos t نظر به محور y متناظر می‌باشد.

تمرین

1- گراف توابع زیر را در انتروال‌های داده شده رسم کنید:

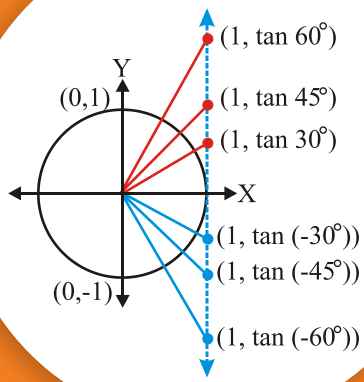
$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

2- برای کدام قیمت‌های t در انتروال $[-2\pi,6\pi]$ ، $\sin t=1$ می‌باشد؟

3- برای کدام قیمت‌های t در انتروال $[-2\pi,6\pi]$ ، $\cos t=0$ می‌باشد؟

4- گراف تابع $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ را در انتروال $[-2\pi,6\pi]$ رسم کنید.

گراف تابع تانجانت



آیا می‌دانید که تابع tan یک تابع متزاید است؟

چون $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ می‌باشد، در صورتی که $x \neq 0$ یا $\cos t \neq 0$ باشد می‌توان گفت که ساحهٔ تعریف تابع tan همه اعداد حقیقی می‌باشد به جز زاویه‌هایی که cos آن‌ها صفر باشد. cos های تمام زاویه‌های $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و یا $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ صفر می‌باشند.

چون $(0,1)$ نقطهٔ تقاطع ضلع دوم زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان با دایرهٔ مثلثاتی می‌باشد، پس با جمع کردن یک دور (2π) با زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ زوایای $\ldots \frac{9\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2} \ldots$ به‌دست می‌آید که قیمت tan آن‌ها تعریف نشده است و خطوط مستقیم $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مجانب‌های عمودی تابع tan می‌باشد.

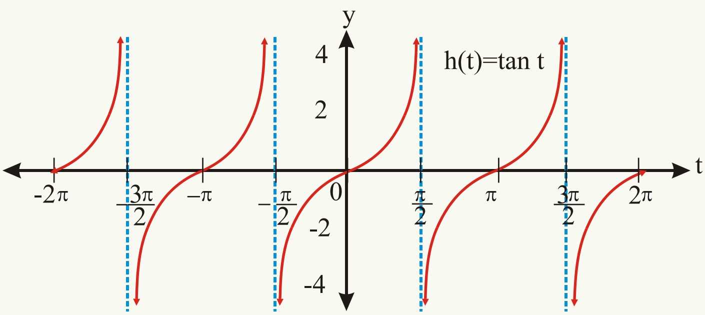
به همین ترتیب، نقطهٔ $(0,-1)$ بالای ضلع دوم زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$ قرار دارد، با جمع کردن (2π) یا یک دور مکمل با زاویهٔ $\frac{3\pi}{2}$ زوایای $\ldots \frac{11\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2} \ldots$ به دست می‌آید که در ساحه تعریف تابع tan شامل نمی‌باشند.

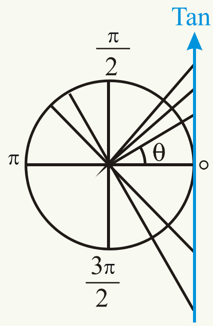
یا ناحیهٔ تعریف (domain) تابع tan تمام اعداد حقیقی می‌باشند بدون مضرب تاق $\frac{\pi}{2}$ و یا $\{IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و Range تابع تانجانت ست تمام اعداد حقیقی می‌باشد.
پریود تابع تانجانت π می‌باشد برای زاویهٔ t رادیان داریم که $\tan(t \pm \pi) = \tan t$ است.

با افزایش مقدار زاویهٔ $\hat{t}$ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ مقدار $\tan t$ نیز از صفر تا $+\infty$ به ترتیب افزایش می‌یابد ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است). در ناحیهٔ دوم نیز وقتی که زاویهٔ t از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش می‌یابد $\tan t$ از $-\infty$ تا صفر افزایش می‌یابد.

به همین ترتیب در ناحیهٔ سوم با افزایش زاویهٔ $\hat{t}$ از π تا $\frac{3\pi}{2}$ تانجانت زاویهٔ $\hat{t}$ از صفر تا $+\infty$ افزایش می‌یابد. در ناحیهٔ چهارم تانجانت زاویهٔ $\hat{t}$ از $-\infty$ تا صفر افزایش می‌یابد.
جدول زیر تحولات تابع تانجانت را نشان می‌دهد و تحولات این تابع در اشکال زیر نیز نشان داده شده است:

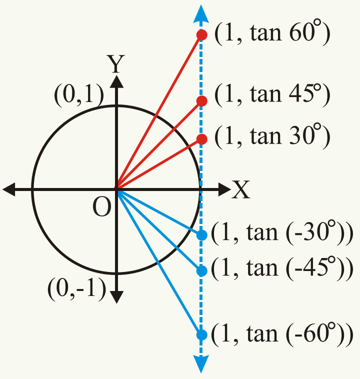
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\pi/2$	2π
$\tan t$	0 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗ 0

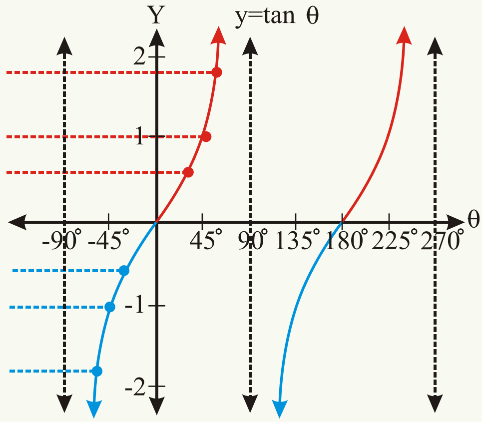




اگر θ بر حسب درجه باشد شکل و قیمت‌های تابع $\tan\theta$ طور زیر مشاهده کنید:

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقی	تعریف نشده	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبی	تعریف نشده	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73



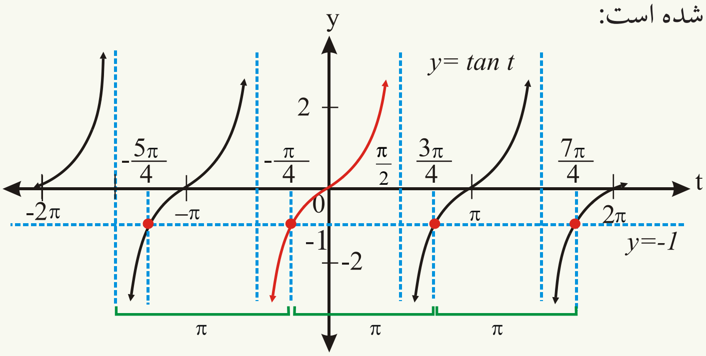


چون تغییرات تابع تانجانت در فاصلهٔ $(\pi,2\pi)$ مثل تغییرات در انتروال $(0,\pi)$ می‌باشد، پس دورهٔ تناوب تابع تانجانت π می‌باشد و تابع $\tan$ یک تابع متزاید می‌باشد.

از طرف دیگر، اگر $b>0$ باشد گراف تابع $f(t)=\tan bt$ در بین $-\frac{\pi}{2}\square\frac{\pi}{2}$ یک دوره (cycle) را می‌سازد. و پریود این تابع $\frac{\pi}{b}$ می‌باشد؛ طور مثال: پریود تابع $f(t)=\tan 2t$ عبارت از $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{b}$ می‌باشد.

مثال: تمام قیمت‌های t را دریابید که در آن $\tan t=-1$ باشد.

حل: چون قیمت‌های $\tan t$ درفاصله π تکرار می‌شود. پس قیمت‌های بی شمار t وجود دارد که $y=\tan t$ مساوی به -1 است که در شکل زیر چند نقطهٔ آن به طور نمونه نشان داده شده است:



چون در انتروال $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ محض یک نقطه $(-\frac{\pi}{4},-1)$ دارد. پس تمام قیمت‌های t که

در آن $\tan t=-1$ است مساوی است به: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K یک عدد تام است)
تابع tan هر وقت متزاید بوده در تمام اعداد حقیقی تعریف شده بدون زوایایی که دارای مضرب تاق $\frac{\pi}{2}$ باشند دورهٔ تناوب آن π می‌باشد، زیرا که: $\tan(t\pm\pi)=\tan(t)$.
چون $\tan(-t)=-\tan t$ است، لذا $y=\tan t$ یک تابع تاق می‌باشد و در مضرب عدد تام تاق $\frac{\pi}{2}$ مجانب عمودی نیز دارد.

خلص مشخصات توابع sine ، cosine و tangent

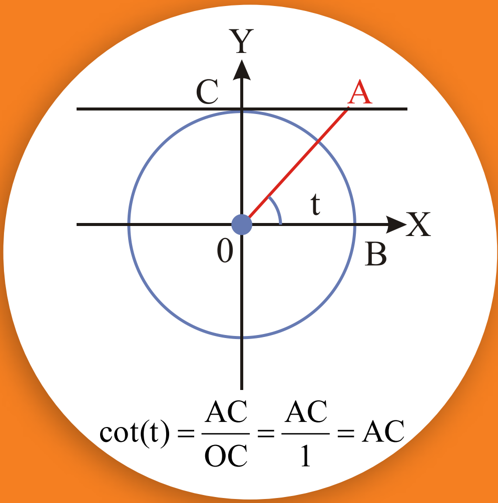
	پریود	Range	Domain	سمبول	تابع
تاق	2π	تمام اعداد حقیقی از -1 الی 1	ست تمام اعداد حقیقی	$f(t)=\sin t$	sin*e*
جفت	2π	تمام اعداد حقیقی از -1 الی 1	تمام اعداد حقیقی	$f(t)=\cos t$	cos*ine*
تاق	π	تمام اعداد حقیقی	تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تاق $\frac{\pi}{2}$	$f(t)=\tan t$	tan*gent*

یا به عباره دیگر:

$$D_{\sin}=D_{\cos}=IR \qquad R_{\sin}=R_{\cos}=[-1,1]$$
$$D_{\tan}=\{x\in IR \ : \ \cos x\neq 0\}$$

تمرین

1 – به کدام قیمت زاویهٔ t، قیمت تابع $\tan t$ درا نتروال $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ کمتر از صفر است؟
2 – گراف تابع $y=3\tan\theta$ را رسم کنید.
3 – پریود تابع $\tan\theta$ عبارت است از:
a) 2π b) π c) 3π d) هر سه درست نیستند
4 – اگر زاویهٔ θ از 0° الی 90° تحول کند. $\tan\theta$ عبارت است از:
a) از -1 تا $-\infty$ b) از صفر تا $+\infty$ c) از $-\infty$ تا $+\infty$



گراف تابع کوتانجانت

• آیا می‌دانید که دورهٔ تناوب تابع کوتانجانت چقدر است؟

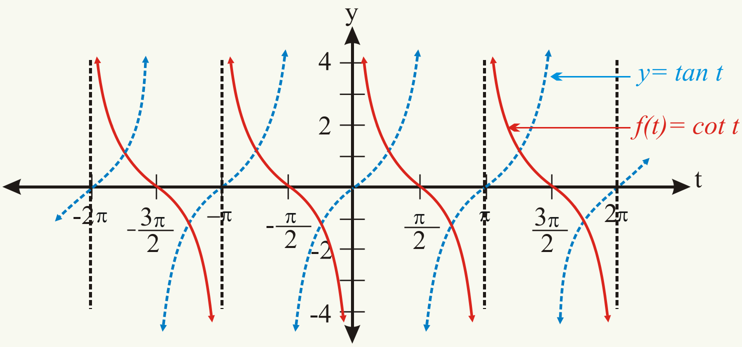
• اگر $\sin t = 0$ باشد آیا $\cot(t)$ تعریف شده است؟ یا خیر چرا؟

چون $\cot(t) = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ می‌باشد، اگر $\sin t = 0$ باشد $\cot(t)$ تعریف نشده است که t یک عدد تام است. ناحیهٔ تعریف (domain) تابع cot تمام اعداد حقیقی است بدون مضرب تام π یا به عبارت دیگر $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi, k \in z$

یا $dom_{cot} = \{t \in IR / \sin t \neq 0\}$ و Range این تابع ست تمام اعداد حقیقی می‌باشند.

گراف تابع $f(t) = \cos(t)$ در مضرب عدد تام π مجانب عمودی (Vertical asymptotes) دارد. $(t = k\pi)$ که k یک عدد تام است. با افزایش مقدار زاویهٔ t از صفر تا $\dfrac{\pi}{2}$ قیمت $\cot(t)$ از $+\infty$ تا صفر کاهش می‌یابد($\cot\ 0°$ تعریف نشده) در ناحیهٔ دوم وقتی که زاویهٔ t از $\dfrac{\pi}{2}$ تا π افزایش می‌یابد $\cot(t)$ ازصفر تا $-\infty$ کاهش می‌یابد. با توجه به این‌که دورهٔ تناوب تابع cot مساوی به π است در ناحیه‌های سوم و چهارم نیز تغییرات $\cot(t)$ مثل تغییرات ناحیه‌های اول و دوم می‌باشد. حقیقت فوق را در جدول و شکل زیر مشاهده کرده می‌توانید.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$



گراف تابع secant(t) (Graph of the secant Function)

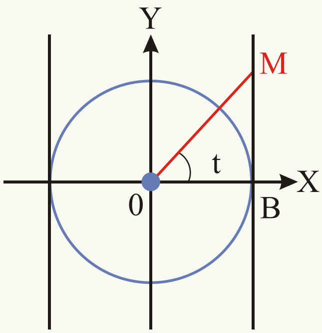
گراف $\sec(t)$ و $\cos(t)$ باهم چه رابطه دارند؟

گراف تابع $f(t)=\sec(t)$ با گراف تابع $\cos(t)$ رابطهٔ معکوس دارد، زیرا که $\sec(t)=\dfrac{1}{\cos(t)}$ می‌باشد اگر $\sec(t)$ را به شکل $\dfrac{1}{\cos(t)}$ در نظر بگیریم وقتی‌که قیمت زاویهٔ t از صفر به طرف $\dfrac{\pi}{2}$ یا $90°$ زیاد می‌شود قیمت $\cos(t)$ از (1) به صفر نزدیک می‌شود و قیمت‌های $\dfrac{1}{\cos(t)}$ یا $\sec t$ از 1 به طرف $+\infty$ زیاد می‌شود. اگر $t=90°$ شود $\sec t$ تعریف نشده است و اگر t از $90°$ کمی زیاد شود قیمت $\sec(t)$، $-\infty$ شده و در $180°=\pi=t$ مساوی به -1 می‌شود. به همین ترتیب اگر t از $180°$ به $270°$ زیاد شود، پس قیمت $\cos(t)$ از -1 به طرف صفر تقارب می‌کند و $\sec t$ از -1 به $-\infty$ تناقص می‌کند و در $270°=\dfrac{3\pi}{2}=t$ قیمت $\sec(t)$ غیر معین می‌شود، هم‌چنان وقتی‌که زاویه t از $270°$ به $360°$ افزایش کند $\cos(t)$ از صفر الی (1) قیمت می‌گیرد و $\sec(t)$ از $+\infty$ تا به 1 تناقص می‌کند، مشاهده می‌شود که:

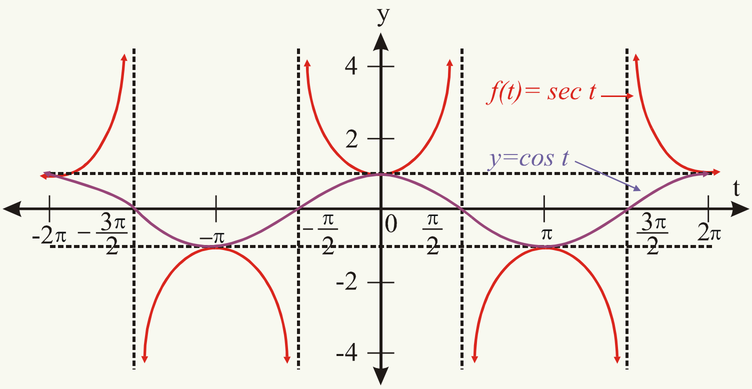
$$\text{Domain } \sec t = IR - \{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in z\}$$

و $\text{Range } \sec(t) = IR - \{t \mid -1\le t\le 1\}$ یا تمام اعداد حقیقی بدون انتروال $]-1,1[$ و یا *Range* تابع $f(t)=\sec(t)$ تمام اعداد حقیقی اند که بزرگتر یا مساوی به یک و یا کوچک‌تر یا مساوی به -1 باشد طوری‌که مشاهده می‌شود دورهٔ تناوب تابع $\sec(t)$ نیز 2π می‌باشد و تابع $f(t)=\sec(t)$ در $t=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ مجانب‌های عمودی دارد که k

یک عدد تام است.



$$\sec t = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t) = \sec t$	$1 \nearrow +\infty$	$\| \; -\infty \nearrow$	$-1 \searrow -\infty$	$\| \; +\infty \searrow$	1

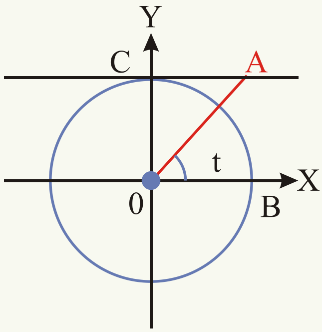
فعالیت

گراف تابع $f(t) = \frac{4}{3}\sec(t)$ را ترسیم نمایید.

گراف تابع Cosecant (Graph of the cosecant Function)

گراف تابع $f(t)=\sin(t)$ با گراف تابع $f(t)=\csc(t)$ چه رابطه دارد؟

چون $\csc t=\frac{1}{\sin t}$ می‌باشد. $\sin t$ و $\csc(t)$ معکوس یکدیگراند. وقتی که $\sin(t)=0$ باشد $\csc(t)$ تعریف نشده‌است. ناحیهٔ تعریف تابع $f(t)=\csc(t)$ تمام اعداد حقیقی می‌باشد بدون زوایایی که دارای مضرب‌های تام π باشند. (زوایایی که $\sin$ آن‌ها صفر می‌باشند) که در این قیمت‌ها دارای مجانب‌های عمودی نیز می‌باشند.



Range تابع $f(t)=\csc(t)$ تمام اعداد حقیقی می‌باشد که بزرگ‌تر یا مساوی به یک و کوچک‌تر یا مساوی به (-1) باشند و پریود این تابع نیز 2π می‌باشد.

وقتی‌که زاویهٔ t از $0°$ الی $90°$ تزاید کند، پس $\sin(t)$ از صفر الی (1) تزاید می‌کند و $\csc(t)$ از $+\infty$ الی (1) تناقص می‌کند. در صورتی‌که $t=90°$ باشد $\csc(t)=1$ می‌شود و اگر زاویه t از $90°$ الی $180°$ تزاید کند، پس $\sin(t)$ از یک به صفر تناقص می‌کند و $\csc(t)$ از 1 الی $+\infty$ تزاید می‌کند. وقتی‌که $t=180°$ باشد $\sin(t)=0$ و قیمت $\csc(t)$ غیر معین می‌گردد. اگر زاویهٔ t از $180°$ الی $270°$ تزاید کند $\sin(t)$ از 0 الی (-1) تناقص می‌کند و $\csc(t)$ از $-\infty$ الی (-1) تزاید می‌کند و در قیمت $t=270°$ قیمت $\csc t$ مساوی به (-1) می‌شود.

به همین ترتیب وقتی که زاویهٔ t از $270°$ الی $360°$ تزاید کند $\sin(t)$ از -1 به طرف صفر نزدیک می‌شود و $\csc t$ از (-1) به طرف $-\infty$ تناقص می‌کند. اگر $t=360°$ باشد قیمت $\csc t$ غیر معین می‌شود.(تعریف نشده است) در $t=k\pi$ این تابع مجانب‌های عمودی دارند k یک عدد تام می‌باشد.

در شکل دایرهٔ مثلثاتی در نقطهٔ C یک مماس را رسم می‌کنیم.

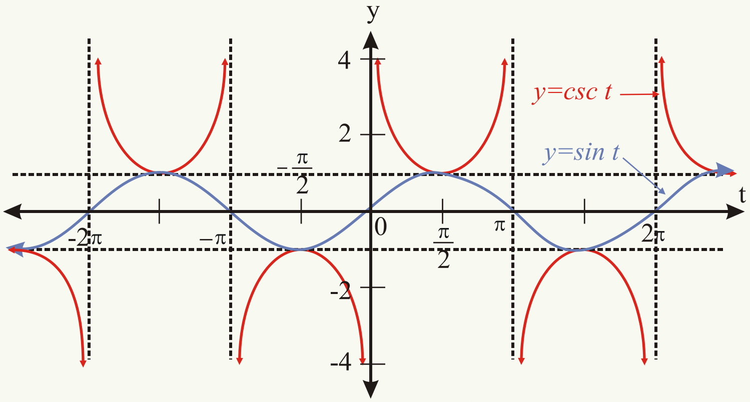
در مثلث قایم الزاویه $\overset{\Delta}{OCA}$ داریم که:

$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA} \qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

تحولات خط OA یا $(\csc t)$ را در جدول زیر خلص می کنیم.

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

مشاهده می‌شود که اگر زاویهٔ t قیمت‌هایی از صفر الی $360°$ یا (2π) را به خود بگیرد؛ پس $\csc(t)\le -1$ و یا $\csc(t)\ge 1$ می‌شود. شکل زیر را مشاهده کنید.



فعالیت

گراف تابع $h(t)=-3\csc t$ را ترسیم کنید.

جدول زیر را مشاهده کنید.

سمبول	Domain	Range	پریود	تاق و جفت
$f(t)=\sec t$	تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تاق $\frac{\pi}{2}$	تمام اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی به -1 بزرگتر و یا مساوی به یک	2π	جفت

تاق	2π	تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی به -1 بزرگ‌تر و یا مساوی به یک	تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام π	$f(t)=\csc(t)$
تاق	π	تمام اعداد حقیقی	تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام π	$f(t)=\cot(t)$

از توابع مثلثاتی این نتیجه به دست می‌آید که با افزایش مقدار زاویهٔ θ یا زاویه t نسبت‌های مثلثاتی $\sin\theta$ و $\tan\theta$ نیز زیاد می‌شوند اما قیمت $\cos\theta$ و $\cot\theta$ کم می‌گردد.

تمرین

1 – تابع $f(t)=\cot(t)$ در کدام قیمت t تعریف نشده است و چرا؟

2 – وقتی‌که زاویهٔ θ از $\frac{\pi}{2}$ به π تحول کند. $\cot\theta$ عبارت است از:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) هر دو غلط اند

3 – اگر $\hat{t}=\pi$ باشد، قیمت $\cot(t)$ عبارت است از:

a) صفر *b*) -1 *c*) تعریف نشده

4 – *Range* توابع sec و csc عبارت است از:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ *b*) تمام اعداد حقیقی c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – ناحیهٔ تعریف (*Domain*) تابع $f(t)=\csc(t)$ عبارت است از:

تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تاق $\frac{\pi}{2}$ (b *a*) تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام π

d) هرسه درست نیست *c*) تمام اعداد حقیقی بدون مضرب تام 2π

6 – تابع $f(t)=\csc(t)$ در انتروال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) متزاید است *b*) متناقص است *c*) نه متزاید است نه متناقص

خلاصه فصل

• توسط رابطهٔ $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ می‌توانیم اندازهٔ زاویه را از یک واحد به واحد دیگری تبدیل نماییم.

• یک رادیان عبارت از زاویهٔ مرکزی است که طول قوس مقابل آن مساوی به شعاع دایره باشد.

• θ برحسب رادیان مساوی است به $\theta=\frac{s}{r}$ که s قوس مقابل زاویهٔ مرکزی و r شعاع دایره می‌باشد.

• اگر رأس زاویه در مبدأی کمیات وضعیه وضلع اولی آن بالای جهت مثبت محور X واقع باشد زاویه در حالت معیاری است.

• اگر در حالت معیاری اضلاع دومی دو یا چند زاویه با هم منطبق باشند. این زوایا به نام زوایای کوترمینل یاد می‌شوند.

• دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌یی است که شعاع آن واحد طول باشد.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

• زوایای θ و $(\theta+2k\pi)$ که k یک عدد تام است زوایای کوترمینل می‌باشند که تمام نسبت‌های مثلثاتی‌شان باهم مساوی اند.

• *domain* توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ست تمام اعداد حقیقی می‌باشند و *Range* آن‌ها $[-1,1]$ است.

• تابع $y=\sin\theta$ تابع تاق است، زیرا که $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ می‌باشد و گراف این تابع نظر به مبدأی کمیات وضعیه متناظر می‌باشد. تابع $y=\cos\theta$ یک تابع جفت است، زیرا که $\cos(-\theta)=\cos\theta$ و گراف تابع $y=\cos\theta$ نظر به محور y متناظر است.

• دو دو نسبت‌های زوایای $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π تعریف نشده‌اند.

• دورهٔ تناوب توابع sin، cos، sec و csc عبارت از 2π و دورهٔ تناوب (پریود) توابع tan و cot عبارت از π می‌باشد.

• تابع tan هر وقت متزاید و تابع cot هر وقت متناقص می‌باشد.

• توابع cos و sec توابع جفت می‌باشند و توابع sin، tan، cot و csc توابع تاق اند.

• اگرگراف توابع نظر به محور y متناظر باشند این گونه توابع جفت اند که برای هر $x\in domf$ رابطه $f(-x)=f(x)$ صدق کند.

• اگر گراف توابع نظر به مبدأی کمیات وضعیهٔ متناظر باشند، توابع تاق اندکه برای هرx، $x\in domf$ رابطه $f(-x)=-f(x)$ صدق کند.

تحول توابع مثلثاتی طور خلص در جدول زیر نشان داده شده‌اند.

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$, $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$, $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$, $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$, $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$, $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$, $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

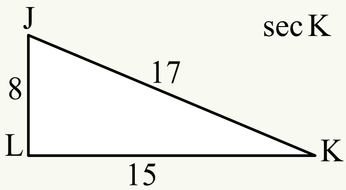
تمرین فصل

1 – زاویهٔ $42,6033°$ را به درجه، دقیقه و ثانیه تبدیل کنید.

2 – اگر گردش ثانیه‌گرد یک ساعت 3 دقیقه و 25 ثانیه باشد. ثانیه‌گرد چند رادیان زاویهٔ مثبت را طی می‌کند؟

3 – در مثلث JLK قیمت‌های زیر را دریابید.

tan J	tan K	cos K	cos J	sin J	sin K
csc K	csc J	cot K	cot J	sec J	sec K



4 – اگر شعاع یک دایره 20cm و طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $s = 85cm$ باشد، زاویهٔ مرکزی چند رادیان است؟

5 – طول قوس‌های مقابل زوایای مرکزی 1radian و $2\,radian$ را در یابید در صورتی که قطر دایره 10 cm باشد.

6 – ضلع دوم (terminal side) زوایای زیر در کجا واقع می‌شود؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\ -7\pi\ ,\ -\frac{11\pi}{2}\ ,\ -500°\ ,\ 900°\ ,\ -\pi$$

7 – زوایای زیر را که به رادیان داده شده‌اند به درجه تبدیل کنید.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\ \frac{\pi}{15}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{17\pi}{45}$$

8 – در مدت 54 دقیقه، ساعت‌گرد و دقیقه‌گرد یک ساعت هریک چند رادیان می‌چرخند؟

9 – اگر قطر تایر کوچک یک تراکتور یک متر و قطر بزرگ آن 120cm باشد، وقتی که تایر کوچک به اندازهٔ زاویهٔ $70°$ بچرخد تایر بزرگتر چند رادیان را طی می‌کند؟

10 – چرخی در یک‌ساعت 300ReV دور می‌زند. در یک ثانیه چند رادیان را می‌پیماید؟

11 – زوایای یک مثلث به ترتیب $4x$ درجه، $\frac{70x}{9}$ گراد و $\frac{\pi x}{20}$ رادیان است. هر یک از این زوایا چند درجه می‌باشد؟

12– $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ زوایای یک چهارضلعی می‌باشند، اگر $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

و $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ باشد. اندازهٔ زوایای این چهارضلعی را بر حسب درجه به دست آورید.

13 - $\frac{1}{12}$ یک دوران مکمل مساوی است به :

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}$g d) هرسه درست اند

14 - مجموعهٔ دو زاویه 17° و تفاضل آن‌ها 17 گراد است، مقدار این دو زاویه را دریابید.

15 - برحسب درجه، مجموع دو زاویه x و تفاضل آن‌ها بر حسب گراد، نیز x می‌باشد مقدار این دو زاویه را دریابید.

16 - اندازهٔ زوایای زیر را به شکل اعشاری درجه بنویسید.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $15^\circ\ 24'\ 45''$

17 - اندازهٔ زوایای زیر را به درجه، دقیقه و ثانیه (DMS) تبدیل کنید.

23.16° 4.2075°

18 - نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\sin(-\frac{\pi}{3})$، $\tan\frac{3\pi}{4}$ و $\cot\frac{7\pi}{6}$ را دریابید.

19 - درانتروال $[-2\pi,2\pi]$ به‌کدام قیمت‌های θ، $\sin\theta=1$ می‌باشد؟

20 - در انتروال $[-2\pi,2\pi]$ تابع $\tan\theta$ به کدام قیمت‌های θ مجانب عمودی دارد؟

21 - از $(i)-(iii)$ کدام رابطه درست نیست؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i و ii درست است. b) فقط ii درست است.

c) i و iii درست است. d) هر سه درست است.

e) هیچ‌کدام درست نیست.

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$، $\sin(-13\pi)$ و $\tan\frac{8\pi}{3}$ را معلوم کنید.

23 - زاویه‌یی را دریابید که اگر از اندازهٔ آن بر حسب گراد 23 واحد کم کنیم اندازهٔ آن بر حسب درجه به دست آید.

24 - مجموع سه زاویه 240 گراد است. اگر زاویهٔ اولی 40 گراد، دومی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان باشد، زاویهٔ سومی چند درجه است؟

25 - نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $4185°$ را دریابید.

26 - نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $(-3660°)$ را دریابید.

27 - تابع $y = \cos\theta$ در انتروال $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$:

$a)$ متزاید است $\quad$ $b)$ متناقص است $\quad$ $c)$ هم متزاید و هم متناقص است

28 - پریود تابع $y = \tan\theta$ عبارت است از:

a) 2π $\quad$ b) π $\quad$ c) $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 - تابع $f(t) = \cos(t)$ یک تابع :

a) جفت است $\quad$ b) تاق است $\quad$ c) نه جفت و نه تاق است

30 - تابعی که گراف آن نظر به مبدأ متناظر باشد عبارت از تابع:

a) جفت است $\quad$ b) تاق است $\quad$ c) نه جفت است و نه تاق

31 - دورهٔ تناوب تابع $y = \cos\theta$ عبارت است از:

a) π $\quad$ b) $\frac{3\pi}{2}$ $\quad$ c) 2π $\quad$ d) 3π

32 - $\sin 67°$ با $\sin 787°$ چه رابطه دارد؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ $\quad$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ $\quad$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 - کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست است؟

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ $\quad$ b) $\sec 135° = \csc 45°$

c) $\sec 135° = -\sec 45°$ $\quad$ d) $\sec 135° = \sec 45°$

34 - کدام‌یک از تساوی‌های زیر درست است؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ $\quad$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$

c) $\tan 240° = \cot 60°$ $\quad$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35- $\cot 0^\circ = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده است

36- $\cos 9\pi = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

37- $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ هر سه درست نیست

38- نسبت‌های مثلثاتی زاویه -2430° را دریابید.

39- $\sin(270^\circ - \theta) = ?$

$a)\ \sin\theta$ $b)\ -\sin\theta$ $c)\ \cos\theta$ $d)\ -\cos\theta$

40- $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

41- $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

42- $\tan(-15\pi) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

43- $\sec(-1530^\circ) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

44- $\cot(-2430^\circ) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

45- $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده

46- $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47- $\tan(90+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ -\tan\theta$ $d)\ \tan\theta$

48- $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)\ -\tan\theta$

49- $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

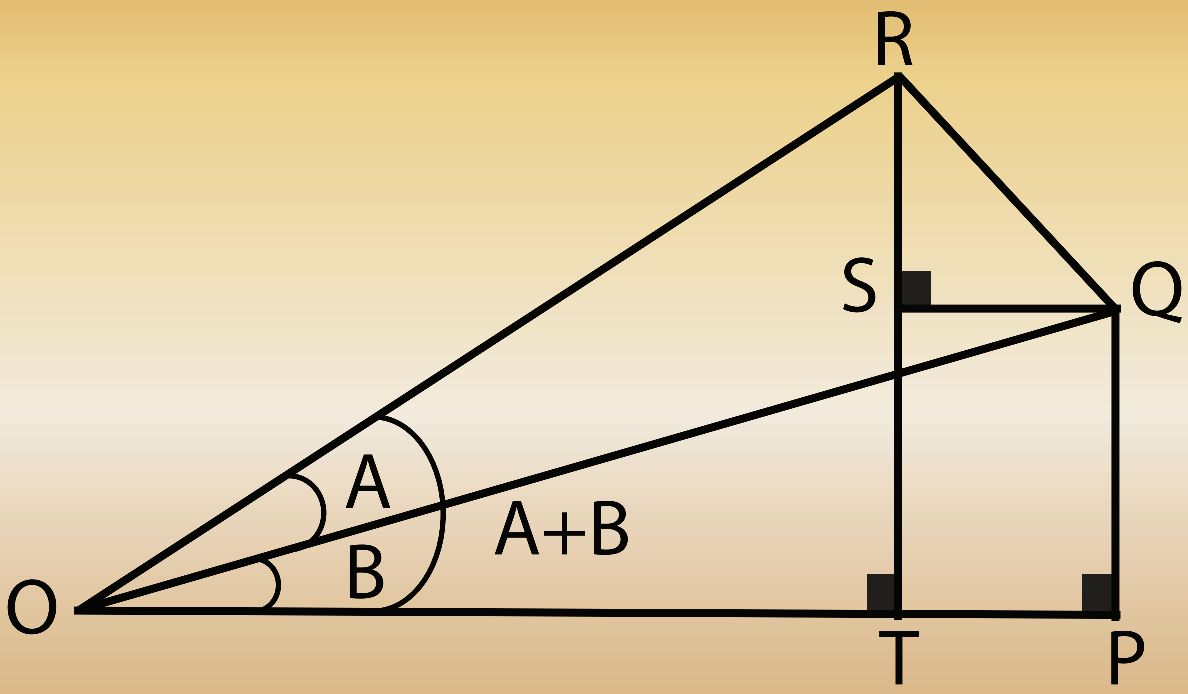
50- $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

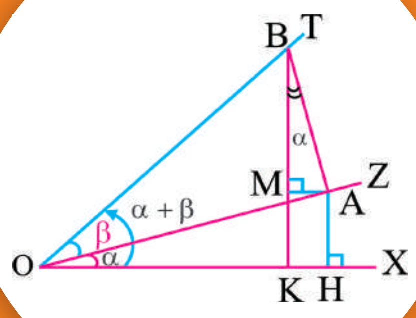
51- کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست است؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

فصل پنجم
تطبیقات مثلثات


R
S
Q
A
A+B
B
O
T
P

قوانین نسبت‌های مثلثاتی زوایای مرکب
فورمول‌های جمع و تفاضل
نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه



آیا درستی رابطه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

را نشان داده می‌توانید؟

1- محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$: زاویهٔ $X\hat{O}Z$ را مساوی به α و زاویهٔ $Z\hat{O}T$ را مساوی به β جدا می‌کنیم و آن‌ها را طوری پهلوی هم قرار می‌دهیم که دو زاویهٔ مجاور تشکیل شوند. به روی قطعه‌خط OT قطعه‌خط OB را مساوی به واحد جدا می‌کنیم. از نقطهٔ B عمود BA را بر OZ رسم می‌نماییم؛ سپس از نقطهٔ A عمود AH را بر OX رسم می‌کنیم با توجه به شکل داریم که:

$$\sin\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{OB}}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\cos\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{\overline{OB}}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\sin\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{\overline{OA}}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{\overline{OA}}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{\overline{OB}}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{\overline{OB}}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

از نقطهٔ A عمود AM را بر KB رسم می‌نماییم. چهار ضلعی KHAM مستطیل است در نتیجه: KM=HA و MA=KH می‌باشند.
زاویهٔ MBA مساوی به زاویهٔ α می‌باشد(اضلاع این دو زاویه یکی بر دیگر عمود می‌باشند)
در مثلث قایم‌الزاویه BMA داریم که:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha \sin\beta$$

اگر در رابطه $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ به عوض KM، KB و $\overline{MB}$ قیمت‌های آن‌ها را عوض کنیم $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$ داریم که:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: محاسبهٔ $\cos(\alpha+\beta)$: به همین ترتیب، اگر در رابطه $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ به عوض KH ،OK و OH قیمت‌های آن را عوض کنیم داریم که:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

3: محاسبه $\tan(\alpha+\beta)$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha\cos\beta$ تقسیم می‌نماییم.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ و $\tan\frac{5\pi}{12}$ را دریابید.

حل

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120°=\sin(90°+30°)=\sin 90°\cos 30°+\cos 90°\sin 30°$$
$$\sin 120°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120°=\cos(90°+30°)=\cos 90°\cos 30°-\sin 90°\sin 30°$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

نسبت‌های مثلثاتی تفاضل دو زاویه

$$\sin 120^{\circ}=\sin(180^{\circ}-60^{\circ})=?$$

اگر در فورمول‌های جمع β را به $-\beta$ عوض کنیم داریم که:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

می‌دانیم که:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعالیت

به همین ترتیب، نشان دهید که: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ می‌باشد.

مثال 1: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin150^\circ$ را دریابید.

حل

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 180^\circ\cos 30^\circ-\cos 180^\circ\sin 30^\circ$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

مثال 2: توسط فورمول‌های تفاضل نشان دهید که $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ می‌باشد.

حل

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

مثال 3: نشان دهید که: $\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta$

حل

$$\cos(270° - \theta) = \cos 270° \cos\theta + \sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

مثال 4: $\tan 120^\circ$ را دریابید.

حل

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعالیت

نشان دهید که $\sin 211° \cos 59° + \cos 211° \sin 59° = -1$ و $\cos 211° \cos 149° - \sin 211° \sin 149° = 1$ می‌باشد.

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$	$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$
$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$

تمرین

1- نشان دهید که:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- نشان دهید که:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- توسط فورمول‌های جمع $\sin 240°$، $\cos 240°$ و $\tan 240°$ را دریابید.

5- توسط فورمول‌های جمع و تفاضل نشان دهید که

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\cos x\cdot\cos y$ می‌باشد.

6- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $210°$ را توسط فورمول‌های جمع دریابید.

7- $\sin 105°$، $\cos 105°$ و $\tan 105°$ را دریابید.

$105^\circ=(60^\circ+45^\circ)$

8- اگر $\sin x=-\frac{3}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ باشد $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ را دریابید.

9- نشان دهید که: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ می‌باشد.

10- $\sin 2°\cos 88°+\cos 2°\sin 88°=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

نسبت‌های مثلثاتی 2α از جنس α:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا نشان داده می‌توانید که:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

می‌باشد؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

چون $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ می‌باشد.

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

و همچنین $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ است؛ پس:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

مثال 1: اگر $\sin\theta=\frac{4}{5}$ و ضلع دوم θ در ربع دوم باشد $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ را دریابید.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (ضلع دوم θ در ربع دوم می‌باشد).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

اگر $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و ضلع دوم α در ربع اول باشد $\tan 2\alpha$ را دریابید.

اگر $\sin\beta = \frac{12}{13}$ و ضلع دوم β در ربع دوم واقع باشد $\sin 2\beta$ را دریابید.

مثال2: نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $120°$ را از جنس نسبت‌های مثلثاتی $60°$ دریابید.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

به همین ترتیب:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad ، \quad \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

مثال 3: اگر $90° < \theta < 180°$ باشد و $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ باشد، قیمت $\cos 2\theta$ را دریابید.

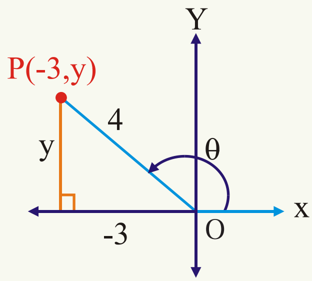
حل

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$
$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (زیراکه قیمت y در ربع دوم مثبت می‌باشد.)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$



فعالیت

اگر $90° < \theta < 180°$ باشد و $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ باشد قیمت $\sin\frac{\theta}{2}$ را دریابید.

همچنین می‌توان قیمت‌های $\sin\theta$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را از جنس $\tan\frac{\theta}{2}$ دریابیم:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

زیرا می‌دانیم که:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت و مخرج را بالای $\cos^2\frac{\theta}{2}$ تقسیم می کنیم)

$$\sin\theta = \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} = \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+1} = \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{1} = \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}} = \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

همچنین می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را از جنس نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 2θ به دست آوریم.

$$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \qquad \text{یا} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

به همین ترتیب:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta\quad=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\qquad \text{یا} \qquad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

در نتیجه:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}\qquad \text{یا} \qquad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال1: نسبت‌های مثلثاتی $30°$ را از جنس $60°$ دریابید.

حل

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال2: اگر $180°<\theta<270°$ و $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ باشد، قیمت $\cos\frac{\theta}{2}$ را دریابید.

حل

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$ (زیرا قیمت x در ربع دوم منفی می باشد.)

چون $180° < \theta < 270°$ است، پس $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ می‌باشد، بدین معنی که علامهٔ $\cos\frac{\theta}{2}$ منفی می‌باشد.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

نشان دهید که: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ و $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ می‌باشد.

مثال3: اگر $\cos\theta = \frac{4}{5}$ باشد و ضلع دوم θ در ربع اول باشد. قیمت‌های $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ را دریابید.

حل

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

مثال4: نشان دهید که $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$

حل

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad , \quad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

تمرین

1- نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $240°$ را از روی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $120°$ دریابید.

2 - اگر $\sin\theta = \frac{3}{5}$ و ضلع دوم θ در ربع اول باشد $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ را دریابید.

3 - اگر $\sin\theta = \frac{4}{5}$ و ضلع دوم θ در ربع دوم باشد $\cos\theta/2$ را دریابید.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ را از جنس $\sin\frac{\pi}{6}$ دریابید.

5 - اگر $\sin\theta = \frac{12}{13}$ و ضلع دوم θ در ربع دوم باشد $\sin\theta/2$ و $\tan\theta/2$ را دریابید.

6 - نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $15°$ را به کمک نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $30°$ دریابید.

7 - اگر $\sin\beta = \frac{12}{13}$ باشد و ضلع دوم β در ربع دوم باشد، قیمت $\sin 2\beta$ مساوی است به:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) هر سه درست نیست

8 - $? = \frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 3α از جنس نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آیا صحت رابطهٔ $\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$ را نشان داده می‌توانید؟

چون

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

مثال 1: $\sin 180^\circ$ را از جنس $\sin 60^\circ$ به دست آورید.

حل

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

چون:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270^\circ$ را از جنس $\cos 90^\circ$ دریابید.

مثال2: $\cos 180^\circ$ را از جنس $\cos 60^\circ$ دریابید.

حل

$$\cos 180^\circ = 4\cos^3 60^\circ - 3\cos 60^\circ = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

دریافت $\tan 3\propto$:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

مثال3: قیمت $\tan 135^\circ$ را از جنس $\tan 45^\circ$ دریابید.

حل

$$\tan 135^\circ = \frac{3\tan 45^\circ - \tan^3 45^\circ}{1-3\tan^2 45^\circ} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1-3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

مثال 4: نشان دهید که $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$ می‌شود.

حل

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$=4\sin\theta\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta\right)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha+\beta+\square)$:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\square - \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta - \tan\beta\tan\square - \tan\alpha\tan\square}$$

مثال 5: $\sin 135^\circ$ را از جنس $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ دریابید.

حل

$$\sin 135^\circ = \sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ) = \sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ + \sin 45^\circ\cos 30^\circ co 60^\circ + \sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین

1- $\sin 90^\circ$، $\cos 90^\circ$، $\tan 90^\circ$ را به ترتیب از جنس $\sin 30^\circ$، $\cos 30^\circ$ و $\tan 30^\circ$ دریابید.

2- $\cos 135^\circ$ و $\tan 135^\circ$ را دریابید.

$135^\circ = (30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta - 6\cos\theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ را از جنس نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\hat{A}$, $\hat{B}$ $\square$ $\hat{C}$ دریابید.

5- نشان دهید که:

$4\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$

$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت‌های مثلثاتی زوایا به شکل حاصل ضرب

$\sin 30° + \sin 60° = ?$

$\tan 45° + \tan 60° = ?$

آیا قیمت $\sin 30^{\circ} + \sin 60^{\circ}$ را دریافت کرده می‌توانید؟

چون می‌دانیم که:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B ....(I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B ....(II)$$

اگر $A+B=P$ و $A-B=q$ فرض شود و رابطهٔ (I) و (II) باهم جمع شوند داریم که:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & A+B=p \\ \underline{A-B=q} & \underline{{}_{-}A\mp B=-q} \\ 2A=P+q & 2B=P-q \\ A=\dfrac{P+q}{2} & B=\dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

درنتیجه داریم که:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

اگر از رابطهٔ I رابطهٔ II تفریق شود داریم که:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

به همین ترتیب:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

اگر رابطهٔ III با رابطهٔ IV جمع شود داریم که:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

اگر از رابطهٔ III رابطهٔ IV تفریق شود داریم که:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

قیمت $\sin 60°+\sin 30°$ و $\cos 60°+\cos 30°$ را دریابید.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

مثال a1: نشان دهید که: $\dfrac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

b: نشان دهید $\sin 3x+\sin x=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$

حل

:b $\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$

فعالیت

نشان دهید که: $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ و $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$ می‌باشد.

مثال 2: نشان دهید که: $\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ و

$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$ می‌باشد.

حل

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

تبدیل حاصل‌ضرب نسبت‌های مثلثاتی زوایا به مجموع و تفاضل

چون: $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$

$A + B = P$

یا $A - B = q$

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}$$

چون: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ می باشد

پس: $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

چون: $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

پس: $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

چون: $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$

پس: $-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

مثال 1: نشان دهید که:

$$a:\quad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\quad \cos 75°-\cos 15°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

حل a:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

حل b:

$$\cos 75°-\cos 15°=-2\cdot\sin\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2}=-2\sin 45°\sin 30°$$

$$=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال2: به شکل جمع یا تفاضل تبدیل کنید:

$$2\cos 95^\circ \sin 13^\circ = \sin(95^\circ + 13^\circ) - \sin(95^\circ - 13^\circ) = \sin 108^\circ - \sin 82^\circ$$

$$\cos 38^\circ \cos 61^\circ = \frac{1}{2}[\cos(38^\circ + 61^\circ) + \cos(38^\circ - 61^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos(-23^\circ)] = \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos 23^\circ]$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

مثال3:

$$\cos 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2}[\sin(34^\circ + 28^\circ) - \sin(34^\circ - 28^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)$$

$$2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

مثال4: نشان دهید که: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$ می‌باشد.

حل

$$\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

مثال5: نشان دهید که: $\frac{\sin 8\theta \cos\theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$ می‌باشد.

حل

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} \qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

تمرین

1- نشان دهید که:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- حاصل‌ضرب نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را به شکل جمع یا تفاضل، تبدیل کنید.

$\cos 30^\circ \cos 60^\circ$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\sin 5x \cos 8x$

$\cos 7\theta \sin 5\theta$ $\cos 5x \sin 8x$ $\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$

$2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$ $\sin 88^\circ \sin 12^\circ$

$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$

3- حاصل‌جمع و یا حاصل‌تفریق نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را به حاصل‌ضرب تبدیل کنید.

$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$

$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$

4- نشان دهید که:

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta \quad , \quad \frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- اگر $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$ باشد (مجموع زوایای داخلی یک مثلث) نشان دهید که:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- نشان دهید که: $\sin 10^{\circ}+\sin 50^{\circ}-\sin 70^{\circ}=0$ می‌باشد.

7- $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

8- توسط فورمول‌های جمع و یا تفاضل نشان دهید که:

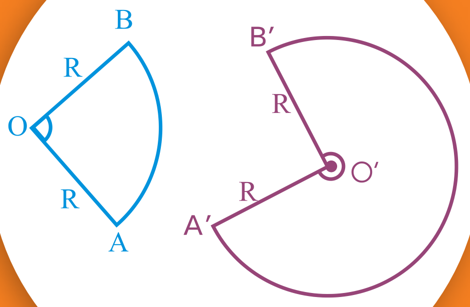
$\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$ $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(360°-\theta)=\cos\theta$ $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$

طول قوس (Arc length)

اگر شعاع یک دایره 5cm باشد. طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی 45° آن چند cm می‌شود؟



اگر طول شعاع‌های دو قوس باهم مساوی باشند، طول‌های این دو قوس با اندازهٔ قوس برحسب رادیان متناسب می‌باشند، طوری که در شکل زیر مشاهده می‌شود:

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{m\overset{\frown}{AB}}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

که $m\overset{\frown}{AB}$ و $m\,A'B'$ اندازه‌های این دو قوس برحسب رادیان می‌باشد، اگر اندازهٔ قوس دو برابر شود؛ طول قوس نیز دوچند می‌شود.

اگر اندازهٔ یک قوس θ°، شعاع دایره R، طول قوس مقابل زاویه θ° (L) و محیط دایره C باشد، داریم که:

$$\frac{L}{\theta^\circ}=\frac{C}{360^\circ}$$

چون محیط دایره $C=2\pi r$ است، پس:

$$\frac{L}{\theta^\circ}=\frac{2\pi R}{360^\circ}\Rightarrow L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

متوجه باید بود که اگر اندازهٔ قوس و یا θ برحسب رادیان باشد $L=R\theta$ می‌شود.

مثال 1: طول قوسی را که در مقابل زاویهٔ مرکزی 45° واقع باشد دریابید، اگر شعاع دایره 14cm باشد.

حل

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14\,cm = \frac{14}{4}\pi\,cm \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7}\,cm = 11\,cm$$

مثال2: اگر شعاع دایره 14cm باشد، طول قوس راکه در مقابل زاویۀ مرکزی $\frac{\pi}{4}$ رادیان واقع باشد دریابید.

$$L = R\theta$$

$$L = 14\,cm\frac{\pi}{4} \approx 14\,cm \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11\,cm$$

مثال3: اگر در یک دایره، در مقابل زاویۀ مرکزی 45° طول قوس $3\pi cm$باشد، شعاع این دایره را دریابید.

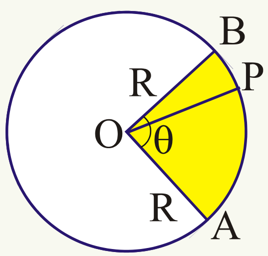
حل: چون $radian\ \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ است، بنا برآن:

$$L = R\theta$$

$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi}cm = 12cm$$

قطاع یک دایره(Sector of a circle): قوس $\overset{\frown}{AB}$ یک دایره را به مرکز O و شعاع R در نظر می گیریم. مجموع تمام قطعه‌خط‌های $\overline{OP}$ که P یک نقطه از قوس $\overset{\frown}{AB}$ می‌باشد قطاع نامیده می‌شود، اگر اندازۀ قوس $\overset{\frown}{AB}$ مساوی به θرادیان باشد، θ را زاویۀ قطاع دایره می گویند یا قطاع را این طور نیز تعریف کرده می‌توانیم:

قسمتی از سطح دایره‌یی که بین دو شعاع دایره واقع باشد قطاع نامیده می‌شود.



مساحت قطاع دایره: مساحت قطاع θ رادیان در دایره‌یی به شعاع R مساوی است به $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ که S عبارت از مساحت قطاع و R شعاع دایره می‌باشد؛ زیرا که:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

و یا اگر θ برحسب درجه باشد

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

مثال1: اگر شعاع یک دایره 10cm باشد. مساحت قطاع را دریابید، در صورتی‌که، زاویهٔ قطاع $\theta=90^\circ$ باشد.

حل: چون $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ Radian است:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

مثال2: اگر شعاع دایره 10cm باشد. مساحت قطاع دایره‌یی را دریابیدکه زاویهٔ قطاع آن $\theta=72^\circ$ باشد.

حل

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\text{ Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

مثال3: اگر شعاع یک دایره 6cm و مساحت قطاع آن $15\pi cm^2$ باشد طول قوس این قطاع را دریابید.

حل

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

$$15\pi cm^2 = 18\theta \Rightarrow \theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} Radian$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm \approx 5 \cdot 3.14cm \approx 15.7cm$

مثال4: دایره‌یی، دارای شعاع 7cm است، محیط و مساحت دایره، طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی °60 و مساحت قطاع مقابل °60 را دریابید.

حل: چون $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian است، پس:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7cm \approx 44cm \quad , \quad A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7} \cdot 49cm^2 \approx 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} cm \quad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 49cm^2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

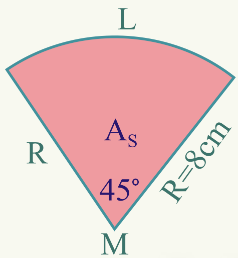
مثال5: اگر شعاع یک دایره 8cm و زاویهٔ قطاع آن °45 باشد، مساحت قطاع، طول قوس مقابل قطاع و محیط این قطاع را دریابید.

حل

مساحت قطاع $A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3,14) \cdot \frac{45°}{360°} \approx 25,12cm$

قوس مقابل قطاع $L = 2\pi R \frac{\theta}{360°} = 2 \cdot 8cm \cdot 3.14 \cdot \frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

محیط قطاع $= 2\pi R \frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2 \cdot 8cm \approx 22.28cm$



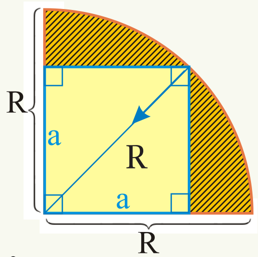
فعالیت

اگر شعاع دایره 10cm باشد مساحت قطاع را دریابید که اندازهٔ قوس آن °180، °216 و °324 باشد.

مثال6: مطابق شکل زیر در یک قطاع 90° مربع به شعاع R محاط شده است. مساحت ناحیهٔ خط شده را دریابید.

حل: چون شعاع دایره R می‌باشد، قطر مربع در ربع دایره، $d = R = a\sqrt{2}$ است.

اگر a ضلع مربع باشد یک ضلع مربع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ و مساحت مربع $S = \frac{R^2}{2}$ می‌باشد چون مساحت ربع دایره $\frac{1}{4}\pi R^2$ است.



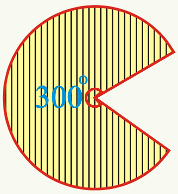
بنابرآن، مساحت قسمت خط شده مساوی است به: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$ می‌باشد.

مثال7: در شکل زیر، قطاع دایره‌یی به شعاع 1cm و به زاویهٔ مرکزی 300° داده شده است. محیط این شکل چند سانتی‌متر می‌باشد؟

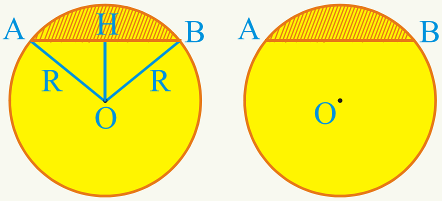
$360^\circ \qquad 2\pi R$

$300^\circ \qquad x \qquad x = \frac{300^\circ \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \frac{5\pi R}{3}\text{cm}$

محیط این شکل $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)\text{cm}$.



قطعهٔ دایره(Segment of a circle): قسمتی از سطح دایره بین قوس و وتر مقابل آن را قطعه می‌گویند. قطعهٔ دایره برحسب قوس آن مشخص می‌گردد؛ طور مثال:



اگر قوس $\overset{\frown}{AB}$ مساوی به $\frac{\pi}{6}$ رادیان باشد

قطعه را $\frac{\pi}{6}$ رادیان می‌نامند.

مساحت قطعه: اندازهٔ مساحت قطعهٔ θ رادیان در دایره به شعاع R مساوی است به:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

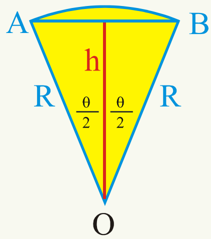
زیرا اگر قوس AB مساوی به θ رادیان باشد و نقطهٔ O را با نقاط A و B وصل کنیم

داریم که: مساحت مثلث AOB− مساحت قطاع AOB= مساحت قطعه

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ مساحت مثلث − S_{OAB} مساحت قطاع =S مساحت قطعه

در شکل زیر مشاهده می‌شود که مثلث $A\overset{\Delta}{O}B$ متساوی‌الساقین می‌باشد بدین اساس

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

پس قاعدهٔ مثلث: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ مساحت مثلث } = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

چون $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\text{cso}\frac{\theta}{2}$ می‌باشد.

در نتیجه: $\frac{1}{2}R^2\sin\theta = \frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=$ مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{O}B$

چون $S_{OAB}=\frac{R^2\sin\theta}{2}$ مساحت مثلث و $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ مساحت قطاع می‌باشد.

پس: $S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ قطعه (مساحت قطعه)

مثال 1: در شکل قبلی $R=6.8cm$ اگر شعاع یک دایره $r=6{,}8cm$ و زاویهٔ یک قطاع آن دایره $\theta=71^\circ$ باشد، مساحت قطاع، مساحت مثلث $A\overset{\Delta}{O}B$ و مساحت قطعهٔ این دایره را دریابید.

حل

$R = 6,8cm$

$\theta = 71°$

مساحت قطاع $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

ارتفاع مثلث $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

قاعده مثلث $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

مساحت مثلث $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

مساحت قطعه = مساحت قطاع - مساحت مثلث

مساحت قطعه $= 28,64cm^2 - 21,96cm^2 = 6,68cm^2$

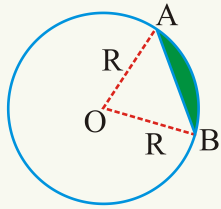
مثال2: مساحت قطعهٔ دایره‌یی را به شعاع R و قوس $\overset{\frown}{AB}$ دریابید؛ اگر:

$\overset{\frown}{AB} = 60°$, $R = 12cm$ باشد.

حل: چون $\frac{\pi^R}{3} = 60°$ می‌باشد، پس:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\,cm^2 - 36\sqrt{3}\,cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

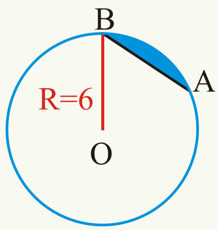


فعالیت

مساحت قطعه‌یی از دایره را به شعاع $6cm$ وقوس $\overset{\frown}{AB} = 120°$ دریابید.

مثال3: مساحت قطعه‌یی از دایره را دریابید که شعاع آن $6cm$ بوده و توسط وتر $6cm$ جدا شده باشد.

حل: چون قوس قطعه $\frac{\pi}{3}$ رادیان است.



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$

$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

تمرین

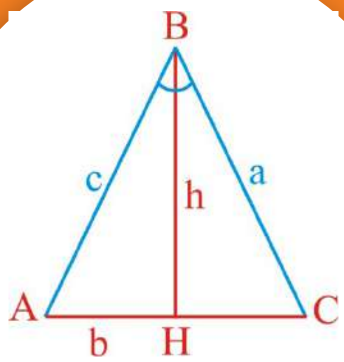
1- مساحت قطاع دایره را در صورتی دریابید که شعاع آن $20cm$ بوده و در مقابل زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{6}$ رادیان واقع باشد.

2- زاویهٔ مرکزی قطاع دایره‌یی را دریابید که مساحت آن $55.5cm^2$ و شعاع آن $12cm$ باشد.

3- اگر شعاع یک دایره $10m$ باشد. طول قوس‌هایی راکه در مقابل زوایای مرکزی 3,8 رادیان و 27 رادیان واقع باشند دریابید.

مساحت مثلث از جنس دوضلع و زاویه بین این دو ضلع

اگر طول دو ضلع یک مثلث 4cm و 8cm باشند و زاویه بین این دو ضلع $30°$ باشد، آیا مساحت مثلث را دریافت کرده می‌توانید؟



مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم و از رأس B ارتفاع $\overline{BH}$ را بر ضلع $\overline{AC}$ رسم می‌نماییم.

چون $\frac{h}{c} = \frac{BH}{c} = \sin A$ در نتیجه $h = c\sin A$ می‌شود.

از هندسه می‌دانیم که مساحت یک مثلث ($S = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}$) است.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

از رأس‌های A و C مثلث مذکور ارتفاع‌ها را رسم کنید و نشان دهید که:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ و $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ می‌باشد.

مثال 1: مساحت مثلثی را دریابید که طول ضلع $a = 3{,}5cm$ و $c = 6cm$ بوده و وسعت زاویهٔ بین این دو ضلع $B = 47{,}5°$ باشد.

حل

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

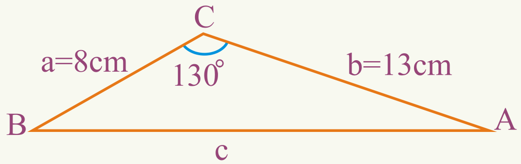
$$\sin 47.5^{\circ}=0.73727733$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^{\circ}\approx 7{,}74cm^{2}$$

مثال2: مساحت مثلثی راکه در شکل زیر مشاهده می‌شود دریابید.

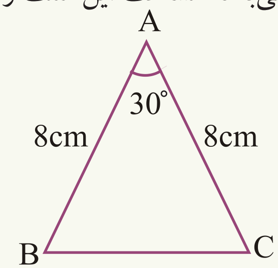
حل

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^{\circ}\approx 39.83\,cm^{2}$$



$$\sin 130^{\circ}=0.7660$$

مثال3: در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm,$ و زاویهٔ $A=30^{\circ}$ می‌باشد مساحت این مثلث را دریابید.



$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^{\circ}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{1}{2}=16\,cm^{2}$$

مساحت مثلث از روی سه ضلع آن(فورمول هیرون)

برای این کار sin نصف زاویه را از جنس طول اضلاع مثلث به دست می‌آوریم. در هر مثلث ABC روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

که a,b,c اضلاع مثلث و p نصف محیط مثلث می‌باشد. ($p=\frac{a+b+c}{2}$) در دروس قبلی خوانده اید که:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \square\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \square\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

در هر مثلث $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ می‌باشدکه این رابطه را به نام قضیه $\cos ine$ یاد می کند. به عوض $\text{Cos}\, A$ قیمت آن را وضع می کنیم:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

چون: $a+b+c=2p$ می‌باشد.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

قیمت‌های $(a-b+c)$ و $(a+b-c)$ را عوض می کنیم؛ پس داریم که:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعالیت

به همین طریق نشان دهید که:

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ می‌باشد.

به همین ترتیب می‌توان نصف $\cos ine$ یک زاویه را از روی طول اضلاع مثلث به دست آورد.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ثبوت: چون $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ می‌باشد.
قیمت $\cos A$ را وضع می‌نماییم.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

در نتیجه داریم که:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

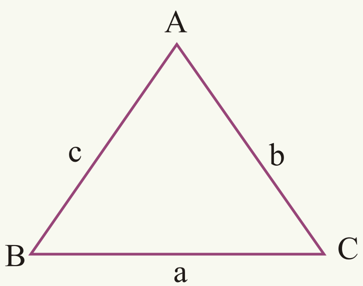
چون $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ است نشان دهید که: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ می‌باشد.

می‌دانیم که $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ است، اگر قیمت‌های $\sin\frac{A}{2}$ و $\cos\frac{A}{2}$ را وضع نماییم داریم که:

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



چون مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ می‌باشد.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

قیمت $\sin A$ را وضع می‌کنیم.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

از مقایسهٔ مساوات فوق می‌توان نوشت که:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

مثال 4: مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن قرار زیر داده شده باشد:

$a = 5cm \qquad b = 4cm \qquad c = 3cm$

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5cm + 4cm + 3cm}{2} = 6cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$$

فعالیت

مساحت مثلثی را دریابید که اضلاع آن $c = 6cm$، $b = 5cm$ و $a = 4cm$ باشند.

مثال 5: اگر اضلاع یک مثلث $a = 18cm$، $b = 24cm$ و $c = 30cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\ cm^2$$

مثال6: مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن $a = 29{,}7ft$، $b = 42{,}3ft$ و $c = 38{,}4ft$ باشند.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55{,}2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

دریافت شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث

دایرهٔ محیطی، دایره‌یی است که مثلث در داخل دایره واقع بوده و دایره با هرسه رأس مثلث مماس بوده و مرکز دایرهٔ محیطی نقطهٔ تقاطع هرسه ناصف عمودی (Perpendicular Bisector) اضلاع مثلث می‌باشد. مطابق شکل، طول اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ عبارت از a، b و c می‌باشند که نقطهٔ O مرکز دایره بوده و نقطهٔ تقاطع هرسه ناصف‌های عمودی اضلاع مثلث نیز می‌باشد؛ چون مثلث BOC متساوی‌الساقین است؛ پس ارتفاع مثلث، زاویهٔ $B\hat{O}C$ و قاعده مثلث را نیز تنصیف می‌کند.

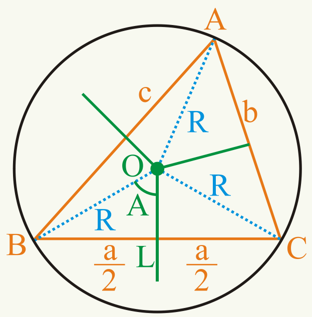
در نتیجه: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

(زیرا زاویهٔ مرکزی دو چند زاویهٔ محیطی می‌باشد که در مقابل عین قوس قرار داشته باشند.)

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$



و از $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ داریم‌که:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

به همین ترتیب:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

مثال 1: شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را دریابید که اضلاع مثلث $a=11cm$، $b=12cm$ و $c=13cm$ باشد.

حل

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{4\sqrt{18\cdot 7\cdot 6\cdot 5}}=6{,}98cm$$

فعالیت

شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی را دریابید که طول اضلاع مثلث 18cm، 24cm و 30cm باشد.

مثال 2: شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی را دریابید که اضلاع آن $a=3cm$، $b=5cm$ و $c=6cm$ باشد.

حل

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot 5\cdot 6}{4\cdot\sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx 3cm$$

شعاع دایرهٔ محاطی یک مثلث

دایرهٔ محاطی یک مثلث عبارت از دایره‌یی است که دایره در داخل مثلث واقع بوده و دایره در داخل با سه ضلع مثلث مماس بوده و مرکز دایرهٔ محاطی تقاطع هرسه ناصف الزاویهٔ مثلث می‌باشد.

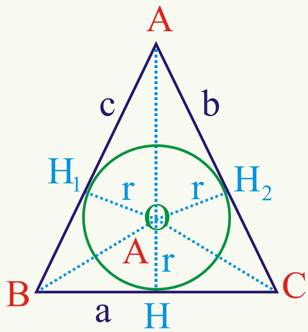
مساحت $\overset{\Delta}{OAB}$ + مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OCA}$ + مساحت $\overset{\Delta}{OBC}$ = مساحت مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot 2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



مثال3: شعاع و مساحت دایرۀ محاطی مثلثی راکه طول اضلاع آن 7cm، 8cm و 9cm باشند دریابید.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

مساحت دایرۀ محاطی مساوی است به: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

مثال4: دو ضلع قایم یک مثلث قایم‌الزاویه به ترتیب 3cm و 4cm می‌باشند. شعاع دایرۀ محیطی و محاطی این مثلث را دریابید.

حل

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

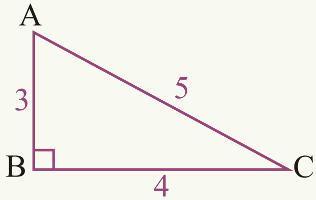
$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$= \frac{5}{2}cm = 2{,}5cm$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{6}{6} = 1cm$$



مثال5: در مثلث قایم الزاویهٔ MTN، اگر اضلاع قایم آن m و n داده شده باشند، مساحت و شعاع دایرهٔ محیطی (R) این مثلث را دریابید.

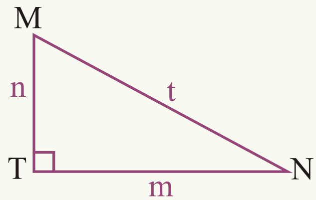
حل

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2+n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2+n^2}}{2mn}$$

شعاع دایره محیطی $R = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$



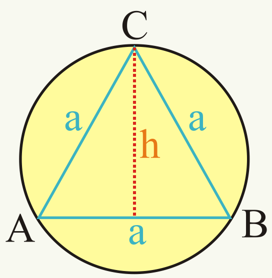
فعالیت

اگر طول اضلاع یک مثلث 34cm، 35cm و 36cm باشند مساحت دایرهٔ محاطی این مثلث را دریابید.

در یافت ارتفاع، مساحت، شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع:

$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

نظر به قضیه فیثاغورث داریم که:



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2$$

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{4a^2-a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$$

$$h=\frac{\sqrt{3}a}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

مساحت مثلث ABC $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

مثال6: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع 18cm است، مساحت، ارتفاع، شعاع دایرهٔ محیطی و محاطی این مثلث را دریابید.

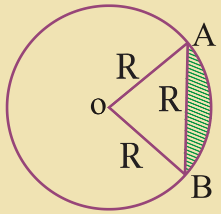
حل: طول یک ضلع این مثلث (a) مساوی است به:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \quad ، \quad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \quad ، \quad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

تمرین



1- مطابق شکل، مثلث OAB متساوی‌الاضلاع بوده که هر ضلع آن R می‌باشد.
دایره با مرکز O رسم شده که از نقاط A و B می‌گذرد، مساحت قطعه‌یی به وتر AB مساوی است به:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

2- اگر طول هر ساق یک مثلث متساوی‌الساقین 6cm و زاویه بین ساق‌های آن $30°$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

3- اگر طول دو ضلع یک مثلث $5\sqrt{2}$cm و 6cm و زاویهٔ بین این دوضلع $45°$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

4- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 3cm، 4cm و 5cm باشد مساحت این مثلث را دریابید.

5- مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن $a=7$cm، $b=9$cm و $c=12$cm باشد.

6- شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قایم‌الزاویه‌یی را دریابید که اضلاع قایم مثلث 12cm و 5cm باشند.

7- اگر طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC، $a=8$cm و شعاع دایرهٔ محاطی این مثلث $r=3$cm باشد. ساق‌ها و شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را دریابید.

8- اگر مساحت یک مثلث قایم‌الزاویه $84cm^2$ و طول یک ارتفاع آن 3,36cm باشد شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را دریابید.

خلاصهٔ فصل

• فورمول‌های مجموع و تفاضل دو زاویه

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \text{و} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{و} \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

• نسبت‌های مثلثاتی 2α از جنس نسبت‌های مثلثاتی α:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

• نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه از جنس نسبت‌های مثلثاتی دو چند زاویه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

• نسبت‌های مثلثاتی نصف یک زاویه از جنس نسبت‌های مثلثاتی زاویه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

• نسبت‌های مثلثاتی سه چند یک زاویه از جنس نسبت‌های مثلثاتی زاویه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

• نسبت‌های مثلثاتی مجموع سه زاویه $(\alpha+\beta+\theta)$

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta$$
$$+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

فورمول‌های ضرب: (فورمول‌هایی که مجموع یا تفاضل نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنند).

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

فورمول‌هایی که ضرب نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه را به مجموع و یا تفاضل تبدیل می‌کنند.

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$
$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$
$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$
$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی θ° با شعاع دایرهٔ R مساوی است به $L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$
- طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی θ رادیان با شعاع دایرهٔ R مساوی است به: $L=R\theta$
- قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع آن واقع باشد. قطاع دایره نامیده می‌شود.

مساحت قطاع از فورمول $A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$ به دست می‌آید.

• قسمتی از سطح دایره بین قوس و وتر مقابل آن را قطعهٔ دایره می‌گویند و مساحت قطعه

از فورمول $A_{Segment}=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ به دست می‌آید.

• مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع مساوی است به:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\ ,\ \ S=\frac{1}{2}bc\sin A\ \ ,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

• **نسبت‌های مثلثاتی نصف زاویه از جنس طول اضلاع مثلث:** P نصف محیط مثلث و a,b,c اضلاع مثلث می‌باشند.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

مساحت مثلث از جنس طول اضلاع: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

• شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث (R) مساوی است به:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\ \Rightarrow\ 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

یا $R=\frac{abc}{4S}$

• شعاع دایرهٔ محاطی یک مثلث از فورمول $r=\frac{s}{p}$ و یا از فورمول

$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ به دست می‌آید.

تمرین فصل

1- نشان دهید که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع (اگر a یک ضلع مثلث باشد) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ می‌باشد.

2- اگر طول اضلاع یک مثلث $a=7cm$، $b=8cm$ و $c=9cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

3- $\cos 165°$ و $\sin 165°$ را توسط فورمول‌های مجموع دو زاویه دریابید.

4- $\sin(-165°)=?$

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, c) $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- نشان دهید که: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$ می‌باشد.

6- توسط فورمول‌های مجموع و تفاضل دو زاویه، نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را دریابید:

$\sin(30°+45°)$ $\cos(150°-45°)$ $\tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\sin(135°-180°)$ $\tan(180°-45°)$

7- توسط فورمول‌های مجموع و تفاضل نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ، صحت رابطه‌های زیر را نشان دهید.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- اگر $0°<\theta<90°$ و $\sin\theta=\frac{2}{5}$ باشد، قیمت $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ را دریابید.

9- نشان دهید که:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$ $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$ $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$ $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

10- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 5cm، 7cm و 8cm باشد. شعاع دایره‌های

محیطی و محاطی این مثلث را دریابید.

11 - $\sin(180^\circ + \theta) = ?$

a) $\sin\theta$ b) $-\cos\theta$ c) $-\sin\theta$ d) $\cos\theta$

12 - به کمک فورمول‌های جمع و تفاضل نشان دهید که:

$\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta$ ، $\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$ و $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$

13 - $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

a) $2\sin\alpha\sin\beta$ b) $2\cos\alpha\cos\beta$ c) $-2\sin\alpha\sin\beta$

14 - نشان دهید که: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ می‌باشد.

15 - حاصل‌ضرب نسبت‌های مثلثاتی زیر را به شکل مجموع و یا تفاضل بنویسید.

$\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$ $\sin 8\theta\cos 10\theta$ $\cos 40^\circ\cos 60^\circ$ $\cos 100^\circ \sin 50^\circ$

16 - مجموع یا تفاضل نسبت‌های مثلثاتی زیر را به شکل حاصل‌ضرب بنویسید.

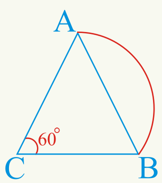
$\sin 12\theta + \sin 8\theta$ $\sin 80^\circ - \sin 72^\circ$

17 - نشان دهید که:

$$\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$$

18 - مساحت یک دایره 180cm^2 است، مساحت قطاع 80° از این دایره را دریابید.

19 - مطابق شکل، طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی 60° مساوی به (1cm) است. شعاع این قوس و طول وتر $\overline{AB}$ را دریابید.



20 - $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ?$

a) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$

21 - اگر $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$، و ضلع دوم θ در ربع اول واقع باشد. قیمت‌های $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ را دریابید.

22 - نشان دهید که $\tan(45^\circ + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ می‌باشد.

23 - $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ$ مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) 0 d) هرسه درست نیست

24 - $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ = ?$

a) $\cos 74^\circ$ b) $\cos 46^\circ$ c) $\sin 74^\circ$ d) $\sin 46^\circ$

25 - $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ = ?$

a) $\cos 17^\circ$ b) $\cos 45^\circ$ c) $\sin 17^\circ$ d) $-\sin 17^\circ$

26 - $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ = ?$

a) $\cos 115^\circ$ b) $\sin 115^\circ$ c) $\cos 45^\circ$ d) $\sin 45^\circ$

27 - اگر $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ باشد و α و β در ربع اول واقع باشند $\cos(\alpha - \beta)$ را دریابید.

28 - اگر $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$، $\cos \square = -\dfrac{3}{5}$ باشد و اضلاع دوم θ و ـــا در ربع سوم واقع باشند $\cos(\theta - \square)$ را دریابید.

29 - نشان دهید که: $\tan x \cdot \tan y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$ می‌باشد.

30- $\cos(0° - t) = ?$

a) $\sin t$ b) $\cos t$ c) $-\sin t$ d) $-\cos t$

31 - نشان دهید که: $\frac{\cos\theta \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \sin\theta$ است.

32 - نشان دهید که:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x \qquad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x \qquad \frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t$$

33 - $\cos(x + y)\cos y + \sin(x + y)\sin y = ?$

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$

34 - $\sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c) -\sin x$ $d) -\cos x$

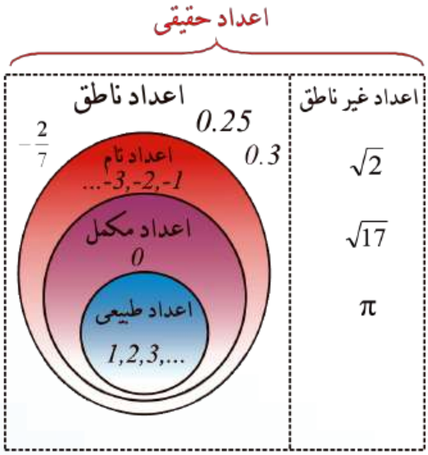
35 - مساحت قطاع دایره‌یی که شعاع آن $2m$ و زاویهٔ مرکزی آن $0{,}5\ radian$ باشد مساوی است به:

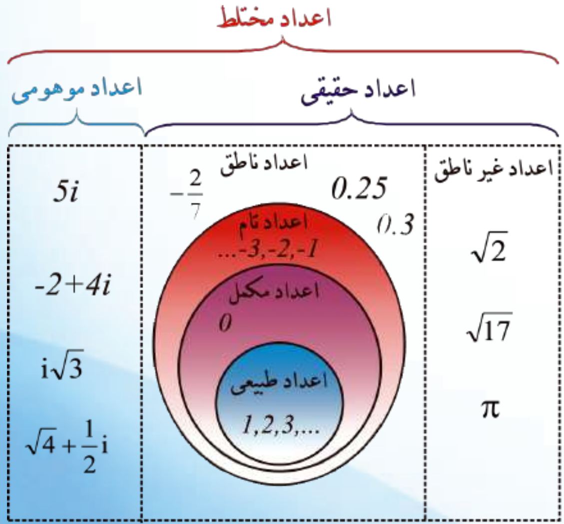
$a)$ $3m^2$ $b)$ $2m^2$ $c)$ $1m^2$ $d)$ هر سه غلط اند.

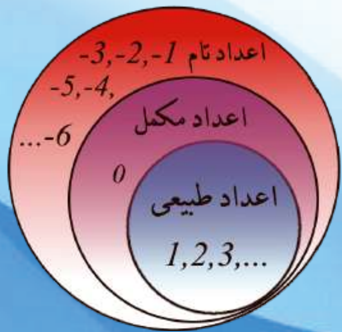
36 - اگر مساحت قطاع یک دایره $200cm^2$ و زاویهٔ مرکزی 2 radian باشد. شعاع این دایره مساوی است به:

a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) هر سه درست نیست.

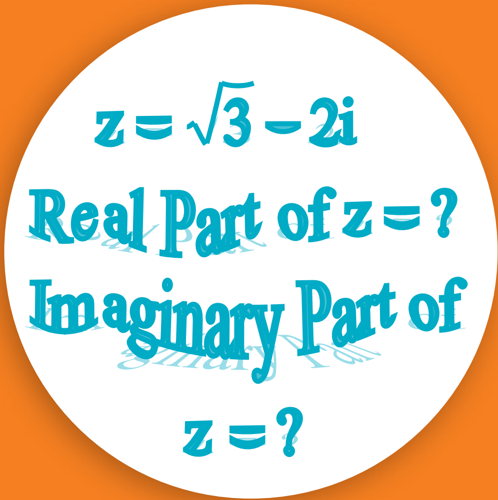
فصل ششم
اعداد مختلط


اعداد حقیقی
اعداد ناطق
اعداد غیر ناطق
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
اعداد تام
...-3,-2,-1
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π


اعداد مختلط
اعداد موهومی
اعداد حقیقی
اعداد ناطق
اعداد غیر ناطق
5i
-2+4i
$i\sqrt{3}$
$\sqrt{4}+\frac{1}{2}i$
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
اعداد تام
...-3,-2,-1
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π


اعداد تام -3,-2,-1
-5,-4,
...-6
اعداد مکمل
0
اعداد طبیعی
1,2,3,...

اعداد مختلط
(Complex numbers)



آیا گفته می‌توانید که چرا معادلهٔ $x^2+9=0$ در ست اعداد حقیقی حل ندارد؟
آیا می‌دانید که ست اعداد حقیقی یک ست فرعی، ست اعداد مختلط می‌باشد؟

اعداد موهومی (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ می‌باشد. حرف i از کلمهٔ یونانی (iota) گرفته شده است، $i=\sqrt{-1}$ را واحد اعداد موهومی می‌گویند.

مثال 1: $\sqrt{-16}$ را دریابید.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

مثال 2: معادلهٔ $x^2+a^2=0$ را حل کنید.

حل

$$x^2+a^2=0 \Rightarrow x^2=-a^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai و $-ai$ اعداد موهومی‌اند، (a یک عدد حقیقی می‌باشد).

طاقت‌های i: (Powers of i)

دیده می‌شود که به کمک $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ اعداد موهومی راساده کرده می‌توانیم به یاد داشته باشید که مربع یک عدد حقیقی، مثبت، لیکن مربع اعداد موهومی منفی می‌باشد.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1 \quad \text{یا} \quad i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i \qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$$

$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i$ $\qquad$ $i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$

i را واحد موهومی می گویند.

از این جا نتیجه می‌شود که، اگر توان واحد موهومی n=4 و یا عددی باشد که بر 4 قابل تقسیم باشد، در آن صورت مساوی به (1) می‌باشد.

مثال3:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

قیمت طاقت‌های $(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ را دریابید.

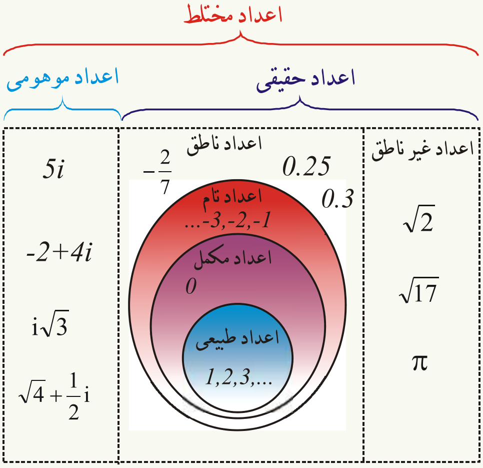
مثال4: i^{54}، i^{1998} و i^{89} را دریابید.

حل: هرگاه عدد 54 بالای 4 تقسیم کنیم، باقی مانده 2 می‌باشد، بنابر آن:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

عددهایی که یک فکتورشان $\sqrt{-1}$ باشد به نام اعداد موهومی یاد می‌شوند. توان‌های طبیعی i یکی از اعداد $i, 1, -i$ و -1 می‌باشد. مربع اعداد حقیقی مثبت و مربع اعداد موهومی منفی می‌باشد.

ست‌های اعداد در طول تاریخ بنابر ضرورت و انکشاف علم ریاضی عرض وجود کرده است.



طوری که می‌دانید ست اعداد طبیعی $IN = \{1,2,3,...\}$ جوابگوی همه مسایل نمی‌باشد. به طور مثال معادلهٔ $3x = 0$ در ست اعداد طبیعی حل ندارد. واضح است که جواب آن $x = 0$ می‌باشد، پس به ست دیگری ضرورت احساس شد که عبارت از: $W = \{0,1,2,3,...\}$ بوده و به نام ست اعداد مکمل یاد می‌شود. این ست هم جواب بعضی سؤال‌ها را گفته نمی‌تواند؛ طور مثال: معادلهٔ $x+2=0$ در ست اعداد مکمل حل ندارد؛ زیرا $x=-2$ حل آن می‌باشد که 2- در ست اعداد مکمل شامل نیست، بنابرآن به موجودیت یک ست دیگر اعداد ضرورت احساس شد که اعداد منفی را هم داشته باشد که به نام ست اعداد تام (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ یاد می‌شود. در این ست اعداد هم معادلهٔ $2x+1=2$ حل ندارد، زیرا حل آن $x=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

بنابرآن، ست اعداد ناطق (Rational Numbers set) به میان آمد، اما در ست اعداد ناطق یا اعداد گویا هم معادلهٔ $x^2-2=0$ حل ندارد، زیرا حل آن $x=\sqrt{2}$ بوده که $\sqrt{2}$ در ست اعداد غیر ناطق (Irrational Numbers set) شامل می‌باشد؛ پس ست اعداد غیر ناطق به وجود آمد. هر دو ست اعداد ناطق و غیر ناطق را، ست اعداد حقیقی (Real Numbers Set) می گویند.

لیکن، ست اعداد حقیقی هم بعضی سؤال‌ها را جواب داده نمی‌تواند؛ مانند معادلات $x^2+1=0$ و یا $x^2+16=0$ که حل‌شان در ست اعداد حقیقی موجود شده نمی‌تواند یا به عبارت دیگر، اعداد منفی در ست اعداد حقیقی جذر جفت ندارند؛ مانند $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ وغیره، اما آن معادلاتی که در ست اعداد حقیقی حل ندارند در ست اعداد مختلط دارای حل می‌باشند.

در سال 1795 م. یک ریاضی‌دان جرمنی به نام گوس (Gauss) مفهوم اعداد مختلط را به شکل زیر ارائه کرد:

مجموعه‌یی اعداد حقیقی و موهومی را ست اعداد مختلط (Complex Numbers set) می گویند.

اگر یک عدد مختلط را به حرف z نمایش دهیم $z = a + bi$، که شکل معیاری یک عدد مختلط می‌باشد، طوری که a قسمت حقیقی (Real Part of z) و bi قسمت موهومی عدد مختلط(Imaginary Part of z) می‌باشد. ست اعداد مختلط این طور تعریف می‌شود:

$$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ i^2 = -1\}$$

عدد مختلط z را به شکل جورۀ مرتب نیز نوشته کرده می‌توانیم:

$$z = a + bi = (a, b) \quad , \quad z = a - bi = (a, -b)$$

اگر a=0 شود: $Z = 0 + bi = bi$ که bi یک عدد خالص موهومی (Pure imaginary number) می‌باشد و اگر b=0 باشد $z = a + 0 \cdot i = a$ می‌شود که a یک عدد خالص حقیقی (Pure real number) می‌باشد. به یاد داشته باشید که اعداد مختلط؛ مانند اعداد حقیقی خاصیت ترتیب را ندارند.

عدد صفری مختلط (Zero complex Number): عددی است که هر دو قسمت حقیقی و موهومی آن صفر باشند ($a = 0$ $b = 0$) بنابر آن $z = a + bi = 0 + 0i = 0$

فعالیت

در اعداد مختلط $4 + 3i$ و $2 - 5i$ قسمت‌های حقیقی و موهومی را مشخص کنید.

مثال 1: در اعداد مختلط $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ و $2 - 5i$ قسمت‌های حقیقی و موهومی را نشان دهید.

حل: در $1 - i$ قسمت حقیقی آن 1 و قسمت موهومی آن $-i$ می‌باشد.

در عدد مختلط $\sqrt{3} - 3i$ قسمت حقیقی آن $\sqrt{3}$ و قسمت موهومی آن $-3i$ می‌باشد.

در عدد مختلط $5i$ قسمت حقیقی صفر و قسمت موهومی آن $5i$ می‌باشد.

در عدد مختلط $2-5i$ قسمت حقیقی 2 و قسمت موهومی آن $-5i$ می‌باشد.

مثال2: اعداد مختلط 9-i، 0، -9، 6i و $i-1$ را به شکل معیاری (Standard Form) اعداد مختلط بنویسید.

حل: چون شکل معیاری عدد مختلط $z=a+bi$ می‌باشد که در آن a قسمت حقیقی عدد مختلط و bi قسمت موهومی آن است.

جدول زیر، نمایش عددهای فوق را به شکل معیاری اعداد مختلط ارائه می کند.

شکل معیاری $(z=a+bi)$	عددهای مختلط
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

z=a+bi شکل معیاری اعداد مختلط می‌باشد که a قسمت حقیقی و bi قسمت موهومی اعداد مختلط می‌باشد.

اگر a=0 باشد، bi را قسمت خالص موهومی و اگر b=0 باشد، a را قسمت خالص حقیقی عدد مختلط می‌نامند.

معادلاتی که در ست اعداد حقیقی حل ندارند در ست عداد مختلط حل دارند.

تمرین

1 - قیمت‌های $(i)^{-33}, (i)^{79}$ ، $(i)^{202}, (2i)^2$ و $(3i)^2$ را دریابید.

2 - عددهای زیر را به شکل معیاری اعداد مختلط بنویسید:

$$-3i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad 5i \quad , \quad -i-4$$

3 - اعداد مختلط $-3i$, $5+3i$, $7-i$ □ $\sqrt{5}-\sqrt{7}i$ را به شکل جوره‌های مرتب بنویسید.

4 - قسمت حقیقی عدد مختلط $i-$ مساوی است به:

$$d)\,2 \quad , \quad c)\,0 \quad , \quad b)\,-1 \quad , \quad a)\,1$$

5 - جذر عدد $\sqrt{-16}$ مساوی است به:

$$d)\,\pm 2 \quad , \quad c)\,\pm 4i \quad , \quad b)\,-4 \quad , \quad a)\,\pm 4$$

عملیه‌های چهارگانه در اعداد موهومی

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا عددهای موهومی $3i$ و $4i$ راجمع کرده می‌توانید؟

آیا حاصل‌ضرب عددهای موهومی $10i$ و $50i$ یک عدد حقیقی می‌باشد؟

جمع و تفریق اعداد موهومی

عددهای موهومی را می‌توان به شکل زیر جمع و تفریق نمود:

a) **عملیهٔ جمع:** حاصل جمع دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

مثال 1: حاصل جمع $7i$ و $8i$ و حاصل جمع $5i$ و $\sqrt{7}i$ را دریابید.

حل

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$

$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b) **عملیهٔ تفریق:** حاصل تفریق دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

مثال 2: حاصل تفریق $7i-4i$ و $9i-13i$ را دریابید.

حل

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$

$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c) **عملیهٔ ضرب:** حاصل‌ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی (Real number) می‌باشد.

مثال 3: حاصل‌ضرب $(10i)\cdot(5i)$ و $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)$ رادریابید.

حل

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

زیرا که $i^2=-1$ می‌باشد، بنابرآن $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ در حالی‌که -50 یک عدد حقیقی (Real number) است.

به همین ترتیب: $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

در ضرب اعداد موهومی خاصیت تبدیلی (Commutative Property) صدق

می‌کند، یعنی $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعالیت

حاصل‌ضرب $(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ را به دست آرید.

d) عملیهٔ تقسیم: حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است.

مثال 4: حاصل تقسیم $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ ، $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}$ را به دست آرید.

حل

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ یک عدد حقیقی است)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ یک عدد حقیقی است)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعالیت

$36i$ را بالای $-2i$ تقسیم نمایید.

در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد موهومی، خاصیت تبدیلی صدق می‌کند. حاصل‌ضرب و حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی است.

تمرین

1) جمع کنید. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفریق کنید. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) عددهای موهومی زیر را با هم ضرب و تقسیم کنید.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$, $\frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

جمع و تفریق اعداد مختلط

آیا از تساوی $3x-2yi=6+i$ قیمت‌های x و y را به دست آورده می‌توانید؟
آیا می‌دانید که به کدام عدد مختلط عنصر عینیت عملیهٔ جمع اعداد مختلط می‌گویند؟

$$(1+2i)+(-1-2i)=0$$

اعداد مساوی مختلط (Equal Complex Numbers)

دو عدد مختلط وقتی با هم مساوی می‌باشند که قسمت‌های حقیقی و موهومی هر دو عدد با هم مساوی باشند، عددهای $z_1=a+bi$ و $z_2=x+yi$ وقتی مساوی می‌شوند که: $x=a$ □ $y=b$ باشد.

مثال 1: اگر $z_1=x_1+2y_1i$ و $z_2=3-5i$ باشد، آن‌گاه $z_1=z_2$ می‌شود که:

$x_1=3$ □ $y_1=-\frac{5}{2}$ باشد.

فعالیت

1 - اگر $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ و $z_2=-5-6i$ باشد با در نظر داشت $z_1=z_2$ قیمت‌های x و y را دریابید.

2 - اگر $2+mi=k+3i$ باشد، در آن صورت، قیمت عددهای حقیقی m و k را پیدا کنید.

عملیهٔ جمع عددهای مختلط: جمع عددهای مختلط طور زیر تعریف می‌شود:

اگر $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ باشد، در آن صورت،

$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$ می‌باشد. یا به عبارت دیگر:

حاصل جمع دو عدد مختلط عبارت از عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل جمع

قسمت‌های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل‌جمع قسمت‌های موهومی اعداد مختلط داده شده حاصل می‌شود.

مثال2: اگر $z_1 = 2 - 3i$ و $z_2 = 3 + 4i$ باشد، $z_1 + z_2$ را پیدا کنید.

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

به همین قسم:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ عنصر عینیت در عملیهٔ جمع (additive identity) اعداد مختلط می‌باشد.

زیرا که:

$(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$ می‌باشد.

همچنین معکوس جمعی (additive inverse) عدد $a+bi$ عبارت $-a-bi$ می‌باشد.

زیرا که: $(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$

فعالیت

حاصل‌جمع $(3x-yi)+(5x+3yi)$ را به دست آرید.

عملیهٔ تفریق اعداد مختلط

حاصل تفریق دو عدد مختلط عددی است که قسمت حقیقی آن از حاصل تفریق قسمت‌های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل تفریق قسمت‌های موهومی به دست آمده باشد. یعنی:

$$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

مثال1:

$$(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$$

مثال2:

$$(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$$

دو عدد مختلط وقتی با هم مساوی می‌باشند که هر دو قسمت (حقیقی و موهومی) اعداد مذکور با هم مساوی باشند.

حاصل‌جمع دو عدد مختلط، عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل جمع قسمت‌های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل جمع قسمت‌های موهومی اعداد مذکور حاصل شده باشد.

به همین ترتیب حاصل تفریق دو عدد مختلط، عددی است که قسمت حقیقی آن از حاصل تفریق قسمت‌های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل تفریق قسمت‌های موهومی اعداد مذکور به دست می‌آید.

تمرین

1 – اعداد مختلط زیر راجمع کنید.

$(13-12i)+(13+12i)$ $\qquad$ $(2+5i)+(3+4i)$

$(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$ $\qquad$ $(-3+6i)+(10-7i)$

2 – اعداد مختلط زیرا را از هم‌دیگر تفریق کنید.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3 – معکوس جمعی اعداد مختلط زیر را دریابید.

$2+3i \quad , \quad (2,-3) \quad , \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – هرگاه $(x, y \in IR)$ □ $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ باشد قیمت‌های x و y را دریابید.

5 – عملیه‌های زیر را انجام دهید و جواب‌های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6: معکوس‌های جمعی اعداد مختلط زیر را دریابید:

$2-3i$ $\quad$ $8+11i$

$1-i$ $\quad$ $-1+i$

$5-8i$ $\quad$ $-13+13i$

$-5i$ $\quad$ $2i$

ضرب اعداد مختلط



آیا می‌توانید حاصل‌ضرب اعداد مختلط

$(2-3i)(3+4i)$ را به دست آورید؟

با در نظرداشت $i^2=-1$ حاصل‌ضرب دو عدد مختلط به شکل زیر می‌باشد:

اگر $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ باشد.

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= (a+bi)\cdot(c+di) = ac+adi+bci+bidi \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= ac+(ad+bc)i+bd(-1) \\ z_1\cdot z_2 &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

مثال 1: حاصل‌ضرب افادهٔ $(5-4i)\cdot(7-2i)$ را به دست آرید.

حل

$$\begin{aligned} (5-4i)(7-2i) &= 5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i) = 35-10i-28i+8i^2 \\ &= 35-38i+8(-1) \\ &= 35-38i-8 \\ &= 27-38i \end{aligned}$$

فعالیت

حاصل‌ضرب $(2-3i)(3+4i)$ را به دست بیاورید.

چون $(a+bi)(1+0i)=a\cdot 1+a\cdot 0i+bi\cdot 1+bi\cdot 0i=a+bi$ می‌باشد؛ بنابر آن $1+0i$ را عنصر عینیت عملیهٔ ضرب (Multiplicative identity) اعداد مختلط می‌نامند؛ طور مثال:

$(3+5i)(1+0i)=3+5i$

مزدوج یک عدد مختلط (Conjugate of a Complex Number):

مزدوج عدد مختلط $z=x+yi$، عدد $\bar{z}=x-yi$ می‌باشد، طوری که:

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)\cdot(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2+y^2$$

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$$

$$z+\bar{z}=(x+yi)+(x-yi)=2x \qquad 2x=\operatorname{Re}(z)$$

$$z-\bar{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi \qquad 2yi=\operatorname{Im}(z)$$

مثال2: مزدوج $z=3+4i$ عبارت از $\bar{z}=3-4i$ می‌باشد.

$z-\bar{z}$, $z+\bar{z}$ و $z\cdot\bar{z}$ را به دست آرید.

حل

$$z\cdot\bar{z}=(3+4i)\cdot(3-4i)=3(3)+3(-4i)+4i(3)+4i(-4i)$$

$$=9-16i^2=9-16(-1)=9+16=25$$

$z+\bar{z}=(3+4i)+(3-4i)=6$ (6 عدد حقیقی می‌باشد)

$z-\bar{z}=(3+4i)-(3-4i)=8i$ ($8i$ عدد موهومی می‌باشد)

فعالیت

مزدوج اعداد مختلط $z_1=5-3i$, $z_2=7+i$ و $z_3=\sqrt{5}+\sqrt{7}\,i$ را دریابید.

طوری که دیدیم برای دریافت مزدوج یک عدد مختلط، تنها علامت قست موهومی آن را تغییر می‌دهیم.

عدد	مزدوج عدد
-i	i
1-i	1+i
-4+2i	-4-2i
5i-6	-5i-6

معکوس ضربی (Multiplicative inverse) یک عدد مختلط

می‌دانیم که مزدوج عدد $a+bi$ عبارت از $a-bi$ است، و

$(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(b^2i^2)=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$ می‌باشد.

برای دریافت معکوس ضربی $a+bi$ عدد $\frac{1}{a+bi}$ را به شکل معیاری یک عدد مختلط

می‌نویسیم، پس صورت و مخرج را ضرب $a-bi$ می کنیم. (a-bi) مزدوج مخرج می‌باشد.

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

معکوس ضربی عدد $(a+bi)$ عبارت از $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ می‌باشد.

مثال3: معکوس ضربی عدد $2-3i$ را دریابید.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

مثال4: افادهٔ x^2+4 را تجزیه کنید.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot 4=x^2-(i)^2\cdot 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

معکوس ضربی اعداد مختلط $5+3i$ ، $\sqrt{2}-4i$ را دریابید.

اگر $z=x+yi$ و $w=x'+y'i$ دو عدد مختلط باشند، $z\cdot w$ چنین تعریف شده است:

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

برای دریافت مزدوج یک عدد مختلط محض علامت قسمت موهومی را تغییر می‌دهیم و

معکوس ضربی عدد مختلط $a+bi$ عبارت از $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ می‌باشد.

تمرین

1- اعداد مختلط زیر را با هم ضرب کنید:

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- معکوس ضربی اعداد مختلط زیر را دریابید:

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- افاده‌های زیر را تجزیه کنید:

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- قیمت‌های $(-3+2i)^2$ و $(2+i)^2$ را دریابید.

5- اگر $z=4-3i$ باشد، $8z-z^2$ را دریابید.

6- این معادله $x+yi=(2-3i)(2+3i)$ را حل کنید.

7- نشان دهید که: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$، جذر مربع i است.

8- نشان دهید که: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ جذر سوم $-i$ می باشد.

تقسیم دو عدد مختلط
Division of two Complex numbers

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

آیا خارج‌قسمت $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ را به دست آورده می‌توانید؟

چون در مخرج عدد $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد c عدد حقیقی و di عدد موهومی می‌باشد، در قدم اول باید مخرج آن را به یک عدد حقیقی تبدیل کنیم، برای این منظور، صورت و مخرج را ضرب مزدوج مخرج می‌نماییم که این عملیه را گویا کردن (Rationalization) می گویند.

مثال 1: حاصل تقسیم $\frac{4+3i}{2+5i}$ را به دست آرید.

حل: مزدوج 2+5i عدد 2-5i می‌باشد، صورت و مخرج را ضرب مزدوج مخرج یا $2-5i$ می‌نماییم.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

در نتیجه به ملاحظه می‌رسد که در خارج قسمت، قسمت‌های حقیقی و موهومی از هم جدا اند.

فعالیت

حاصل تقسیم (خارج قسمت) $\frac{1+i}{1-i}$ را به دست آورید. جواب خود را به شکل معیاری بنویسید.

تعریف

اگر $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ باشند، $\frac{z_1}{z_2}$ طور زیر تعریف شده است:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

مثال 2: عدد $z_1=2-3i$ را بالای عدد $z_2=1+i$ تقسیم نمایید و بعد امتحان کنید.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}i^2=-\frac{1}{2}-3i+\frac{5}{2}=2-3i$$

مثال 3: حاصل تقسیم $\frac{3+2i}{5-i}$ را به دست آرید.

حل

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{15+13i-2}{25+1}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

اگر $z=x+yi$ و $w=x'+y'i$ دو عدد مختلط باشند؛ در آن صورت $\frac{z}{w}$ چنین تعریف می‌شود:

$$\frac{z}{w}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i \quad , \quad (x'^2+y'^2\neq 0)$$

خاصیت‌های مزدوج یک عدد مختلط

اگر z_1 □ z_2 دو عدد مختلط باشند:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ 2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

مثال 1: اگر $z_1 = 4 + 5i$ و $z_2 = -3 + 2i$ باشند نشان دهید که: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ و $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

حل

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

در نتیجه $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

بنابر آن: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

مثال 2: اگر $z = x + yi$ باشد $z + \overline{z}$ و $z - \overline{z}$ را دریابید.

حل: $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

فعالیت

اگر $z = 2 + 3i$ باشد، $z + \overline{z}$, $\overline{\overline{z}}$ □ $z - \overline{z}$ را دریابید.

تمرین

1- خارج قسمت‌ها را دریابید.

$$\frac{1+i}{1-i}\ ,\ \frac{3-4i}{2-5i}\ ,\ \frac{5-2i}{6-i}\ ,\ \frac{7-i}{3-5i}$$

2- اگر $z_1=-a-3bi$ و $z_2=2a-3bi$ باشند. نشان دهید که

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ و $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ می‌باشد.

3- خارج قسمت‌ها را دریابید و جواب‌های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$$a:\frac{2}{5-i}\qquad b:\frac{3-i}{2+i}\qquad c:\frac{2-3i}{3}$$

4- خارج قسمت $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ مساوی است به:

$a:1$ $\quad$ $b:\ 2$ $\quad$ $c:\ 3i$ $\quad$ $d:\ -2$

5- جواب‌های خود را به شکل $a+bi$ بنویسید.

$$\frac{3+4i}{4i}\qquad \frac{-5}{2-3i}\qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i}\qquad \frac{-4+8i}{2-4i}\qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

حل معادله‌های درجه دوم یک مجهوله در ساحهٔ اعداد مختلط

آیا جذرهای معادلهٔ $x^2+x+4=0$ را دریافت کرده می‌توانید؟

شکل عمومی معادلهٔ درجه دوم یک مجهوله $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ می‌باشد.

اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد. معادله دارای دو جذر مختلف حقیقی می‌باشند:

اگر $\Delta=0$ باشد، معادله دارای دو جذر مساوی حقیقی می‌باشد.

اگر $\Delta<0$ باشد، معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد، لیکن در ساحهٔ اعداد مختلط دارای دو جذر مختلط می‌باشد.

مثال 1: معادلهٔ $x^2-10x+26=0$ را حل کنید.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ می‌باشد.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعالیت

جذرهای فوق را در معادله وضع نموده امتحان نمایید.

مثال 2: معادلهٔ $4x^2+4i\ x+15=0$ را حل کنید.

حل

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4.4.15=16i^2-240=-256$$

$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

$$x_1=\frac{-4i+16i}{2\cdot4}=\frac{12i}{8}=\frac{3}{2}i \qquad x_2=\frac{-4i-16i}{8}=-\frac{5}{2}i$$

مثال3: معادلهٔ $x^2+3ix-2=0$ را به کمک فورمول محمدبن‌موسی در ساحهٔ اعداد مختلط حل کنید.

$$\Delta=b^2-4ac=(3i)^2-4\cdot1\cdot(-2)=3^2\cdot i^2+8=-9+8=-1$$

$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

$$x_{1,2}=\frac{-3i\pm i}{2\cdot1} \qquad x_1=\frac{-4i}{2}=-2i \qquad x_2=\frac{-2i}{2}=-i$$

فعالیت

معادله‌های $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ و $x^2-4x+13=0$ را حل کنید.

تمرین

1) معادلهٔ درجه دوم را پیدا کنید که جذرهای آن $(3+2i)$ و $(3-2i)$ باشد.

2) معادله‌های زیر را حل کنید:

$$x^2-4x+13=0 \;,\; x^2-6x+18=0 \;,\; -4x^2+3x-5=0$$

$$x^2+8x+41=0 \;,\; x^4+1=0 \;,\; 3x^2+x+2=0$$

3) معادله‌های درجه دوم را تشکیل نمایید که جذرهای‌شان طور زیر داده شده باشند:

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

خلاصهٔ فصل

• اعداد منفی در ست اعداد حقیقی جذر جفت ندارند، لیکن در ست اعداد مختلط اعداد منفی جذر جفت دارند.

• اعداد مختلط از اتحاد اعداد حقیقی و اعداد موهومی حاصل می‌شوند.

• مربع اعداد حقیقی مثبت، اما مربع اعداد موهومی منفی می‌باشند.

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• اعدادی را که $\sqrt{-1}$ یک فکتورشان باشد، اعداد موهومی می گویند.

• اعداد مختلط C طور زیر تعریف می‌شود:

$$C = \{z / z = a + bi \quad , \quad a, b \in IR \quad , \quad i = \sqrt{-1}\}$$

• شکل معیاری عدد مختلط $z = a + bi$ می‌باشد که a را قسمت حقیقی z و bi را قسمت موهومی z می گویند یا $a = \text{Re}(z)$ و $bi = \text{img}(z)$

• برای پیدا نمودن توان‌های مختلف i، توان i را بالای 4 تقسیم می‌کنیم که مساوی به یک می‌شود، اگر بالای آن پوره تقسیم نشود، پس توان حرف i را مساوی به باقیماندهٔ عملیهٔ تقسیم بر 4 می‌شود؛ مانند: $i^{4k+r} = i^r$ یا $(i)^{1379} = i^{4 \cdot 344} \cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i$

• اگر در عدد مختلط $z = a + bi$، $b = 0$ باشد، a را عدد حقیقی خالص و اگر $a = 0$ باشد bi را عدد موهومی خالص می گویند.

• آن عدد مختلط که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن صفر باشند، $(a = 0, b = 0)$ عدد مختلط صفری گفته می‌شود.

• دو عدد مختلط z_1 و z_2 وقتی با همدیگر مساوی می‌باشندکه قسمت‌های حقیقی و موهومی شان باهم مساوی باشند. $\square \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ $\text{Im}\,g(z_1) = \text{Im}\,g(z_2)$

• حاصل جمع دو عدد مختلط، یک عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل جمع قسمت‌های حقیقی دو عدد داده شده و قسمت موهومی آن نیز از حاصل جمع قسمت‌های موهومی اعداد داده شده به دست می‌آید.

• حاصل تفریق دو عدد مختلط، عدد مختلطی است که قسمت حقیقی آن از حاصل تفریق قسمت‌های حقیقی و قسمت موهومی آن از حاصل تفریق قسمت‌های موهومی به دست

آمده باشد.

• اگر $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ باشند، پس عملیه‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آن‌ها طور زیر تعریف می‌شود:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• مزدوج عدد مختلط $z = x + yi$ عبارت $\overline{Z} = x - yi$ می‌باشد.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \overline{z} = 2x = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \overline{z} = 2yi = 2y \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• معکوس جمعی عدد $z = a + bi$ عبارت از $-a - bi$ و معکوس ضربی آن $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$ می‌باشد.

• $0 + 0i = (0,0)$ عنصر عینیت عملیهٔ جمع عدد مختلط و $1 + 0i$ عنصر عینیت عملیهٔ ضرب اعداد مختلط می‌باشد.

• معادله‌های درجه دومی که در ست اعداد حقیقی حل ندارند در ست اعداد مختلط حل دارند.

تمرین فصل

1) $(i)^{51}$ مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) عدد موهومی i^{-98} مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) عدد موهومی i^{67} مساوی است به:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوی است به :

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوی است به :

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوی است به:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوی است به:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوی است به:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوی است به:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) هر سه جزء درست نیست

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوی است به:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) اعداد مختلط زیر را باهم جمع کنید:

$(3+4i)+(2+5i)$ ، $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$, $(2+3i)+(2-3i)$

12) اعداد مختلط زیر را تفریق نمایید:

$(4+3i)-(4+4i)$ ، $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$, $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوی است به:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) حاصل‌ضرب $(2-3i)(2+3i)$ مساوی است به:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) اعداد مختلط زیر را به شکل a+bi بنویسید.

$4(2+5i)-(3-4i)$ ، $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$, i^{51}

16) اگر $z_1=2-4i$ □ $z_2=1-i$ باشد نشان دهید که:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

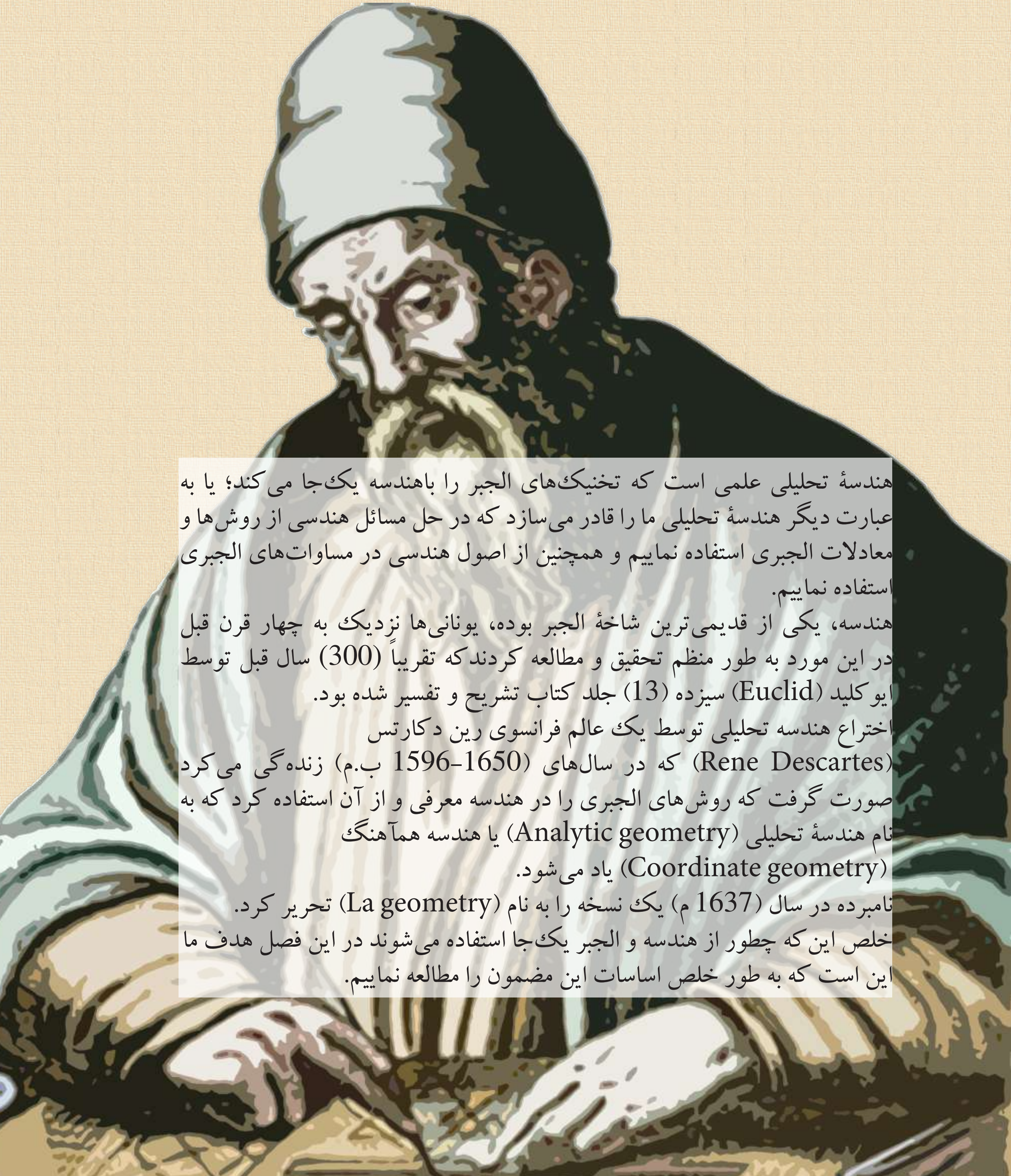
17) معکوس جمعی و معکوس ضربی اعداد مختلط زیر را دریابید:

$3x-\frac{1}{2}yi$, $2a-bi$, $2+5i$, $-7+3i$, $-6+2i$, $3-i$, $\sqrt{2}+i$

18) معادلۀ $5x^2+2x+1=0$ را حل کنید.

فصل هفتم

هندسه تحلیلی



هندسهٔ تحلیلی علمی است که تخنیک‌های الجبر را باهندسه یک‌جا می کند؛ یا به عبارت دیگر هندسهٔ تحلیلی ما را قادر می‌سازد که در حل مسائل هندسی از روش‌ها و معادلات الجبری استفاده نماییم و همچنین از اصول هندسی در مساوات‌های الجبری استفاده نماییم.

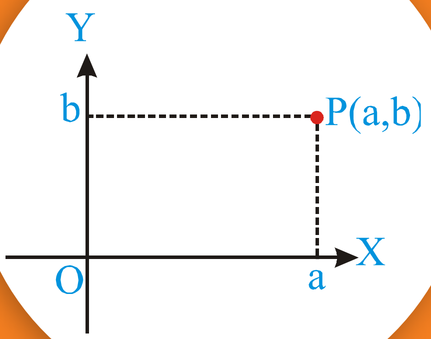
هندسه، یکی از قدیمی‌ترین شاخهٔ الجبر بوده، یونانی‌ها نزدیک به چهار قرن قبل در این مورد به طور منظم تحقیق و مطالعه کردندکه تقریباً (300) سال قبل توسط ایو کلید (Euclid) سیزده (13) جلد کتاب تشریح و تفسیر شده بود.

اختراع هندسه تحلیلی توسط یک عالم فرانسوی رین دکارتس (Rene Descartes) که در سال‌های (1650-1596 ب.م) زنده‌گی می کرد صورت گرفت که روش‌های الجبری را در هندسه معرفی و از آن استفاده کرد که به نام هندسهٔ تحلیلی (Analytic geometry) یا هندسه همآهنگ (Coordinate geometry) یاد می‌شود.

نامبرده در سال (1637 م) یک نسخه را به نام (La geometry) تحریر کرد.

خلص این که چطور از هندسه و الجبر یک‌جا استفاده می‌شوند در این فصل هدف ما این است که به طور خلص اساسات این مضمون را مطالعه نماییم.

سیستم کمیات وضعیه یا سیستم کواردنت (Coordinate system)



آیا نقاط (1−,0)، (2,2)، (4,7−)، (2,0) و (2−,0) را در سیستم کمیات وضعیه تعیین کرده می‌توانید؟

فعالیت

در مستوی کمیات وضعیه دو خط 'XX و 'YY را عمود باهم رسم کنید و نقطهٔ تقاطع این دو خط را (O) بنامید که نقطهٔ O را مبدأی (*Origin*) محورهای کمیات وضعیه می‌نامند.

دو خط عمود باهم به نام محورهای کواردینت (Coordinate axises) یاد می‌شوند که خط افقی 'XOX محور X و خط عمودی 'YOY عبارت از محور Y می‌باشد.

واضح است تمام اعدادی که بالای محور X به طرف راست مبدأ واقع باشند مثبت واعدادی که به طرف چپ مبدأ واقع باشند منفی می‌باشند. و نیز اعدادی که بر روی محور Y به طرف بالای مبدأ قرار دارند مثبت و پایین مبدأ منفی می‌باشند.

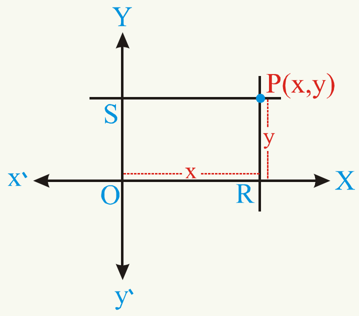
فرض می کنیم که p در مستوی یک نقطه باشد، می‌توانیم که نقطهٔ p را توسط جورهٔ مرتب (*OrderPair*) نشان دهیم، طوری که از نقطهٔ p خطوط موازی با محور X و محور Y رسم می کنیم که این خطوط محور Y را در نقطهٔ S و محور X را درنقطهٔ R قطع می کنند. فاصلهٔ مستقیم $\overline{OR} = x$ و $\overline{OS} = y$ می‌باشد در نتیجه، جورهٔ مرتب (x, y) موقعیت نقطهٔ P را در مستوی کمیات وضعیه تعیین می کند.

هرجورهٔ مرتب در مستوی توسط یک نقطه و هر نقطهٔ مستوی توسط یک جورهٔ مرتب اعداد حقیقی (x, y) نشان داده می‌شود که x و y فاصله‌های مستقیم نقطهٔ p از محورهای X و Y می‌باشند.

این سیستم را سیستم کارتیزینی یا سیستم کواردینت (Coordinate System)

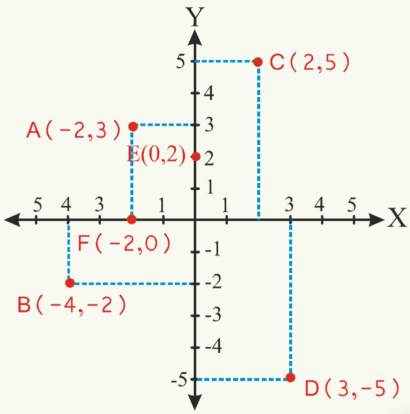
می گویند.

مرکبهٔ اول جورهٔ مرتب مختصهٔ x و مرکبهٔ دوم جورهٔ مرتب را مختصهٔ y یا (y–Coordinate) می‌گویند. محورهای کواردینت مستوی را به چهار ربع (quadrants) تقسیم می کند، طوری که در ربع اول $x>0$ ، $y>0$ در ربع دوم $x<0$ ، $y>0$ در ربع سوم $x<0$ ، $y<0$ و در ربع چهارم $x>0$ و $y<0$ می‌باشند.



مثال 1: نقاط $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ و $F(-2,0)$ را در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

حل



فعالیت

• نشان دهید تمام نقاطی که بالای محور X واقع اند مختصهٔ y آن‌ها صفر و نقاطی که بالای محور Y قرار دارند مختصهٔ x آن‌ها صفر می‌باشند.

• بگویید که نقاط (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) و (4,0) در کدام ربع قرار دارند.

فاصله بین دونقطه (Distance between two points):

آیا می‌توانید بگویید که فاصله بین نقاط $A(4,8)$ و $B(1,2)$ چند واحد می‌باشد؟

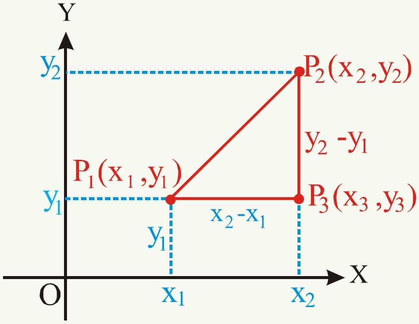
اگر $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ دو نقطه در مستوی باشند، می‌توانیم که فاصله بین نقاط

P_1 و P_2 یا $d = |P_1 P_2|$ را با استفاده از مثلث قایم‌الزاویه $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ توسط قضیه فیثاغورث به دست می‌آوریم، طوری که در شکل مشاهده می‌شود.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

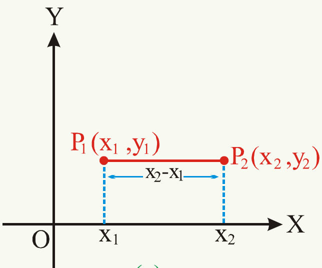


متوجه باید بود که اگر $P_1\ (x_1, y_1)$ و $P_2\ (x_2, y_2)$ بالای خط افقی قرار داشته باشند در این صورت $y_1 = y_2$ می‌شود، طوری که در شکل (a) نیز مشاهده می‌شود.

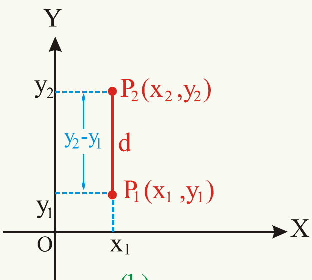
$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

اگر P_1 و P_2 بالای خط عمودی قرار داشته باشند در این صورت $x_1 = x_2$ می‌باشد طوری که در شکل (b) نشان داده شده است:

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$



(a)



(b)

مثال2: فاصله بین نقاط $P_1\ (3,-2)$ و $P_2\ (-1,-5)$ را دریابید.

حل

حل

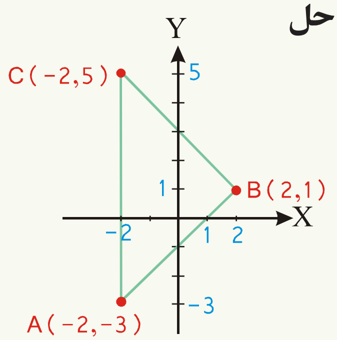
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فعالیت

فاصله بین نقاط $P_1\ (8,0)$ و $P_2\ (2,0)$ را دریابید.

مثال 3: توسط فورمول فاصله نشان دهید که $A(-2,-3)$، $B(2,1)$ و $C(-2,5)$ رأس‌های یک مثلث قایم‌الزاویه می‌باشند.

حل



$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2 = 32+32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$

چون: $|CA|^2 = |AB|^2+|BC|^2$ است.

پس مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ قایم‌الزاویه می‌باشد.

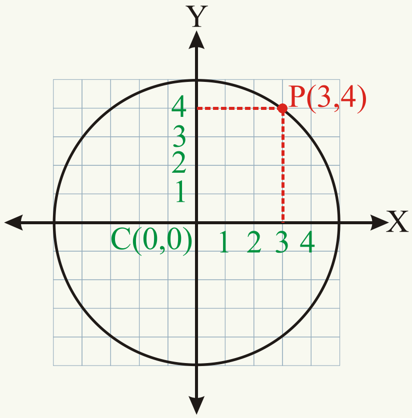
فعالیت

نشان دهید که نقاط $A(-6,3)$، $B(3,-5)$ و $C(-1,5)$ رأس‌های مثلث قایم‌الزاویه می‌باشند.

مثال 4: اگر $C(0,0)$ مرکز دایره و $P(3,4)$ یک نقطه روی محیط دایره باشد طول شعاع این دایره را دریابید.

حل

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



در مستوی سیستم کمیات وضعیه، نقاطی که بالای محور X واقع اند مختصهٔ y آن‌ها صفر و نقاطی که بالای محور y قرار دارند مختصهٔ x آن‌ها صفر می‌باشد.

فاصله در بین دو نقطه $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ از فورمول $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ به دست می‌آید.

تمرین

1- در نقاط داده شدهٔ زیر، فاصلهٔ کدام نقطه از مبدأی کمیات وضعیه 15 واحد می‌باشد؟

$a : (\sqrt{176},7)$

$b : (10,-10)$

$c : (1,15)$

$d : (\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- نشان دهید که نقاط $A(0,2)$، $B(\sqrt{3},1)$ و $C(0,-2)$ رأس‌های مثلث قایم‌الزاویه می‌باشند.

3- فاصله بین نقاط $(0,5)$ و $(0,-3)$ را دریابید.

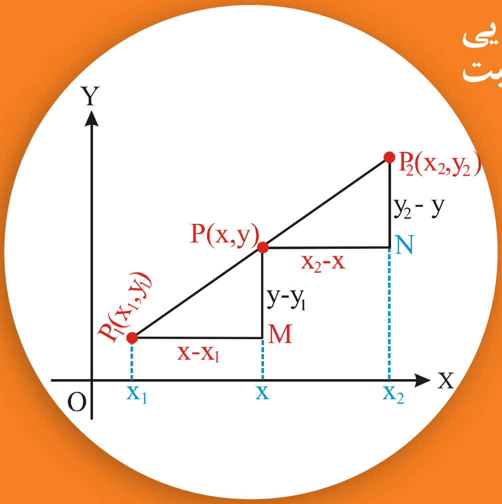
4- فاصله بین نقاط $A(-\frac{1}{2},3)$ و $B(-1,\frac{-3}{4})$ را دریابید.

5- فاصله بین نقاط $(7,11)$ و $(1,3)$ را دریابید.

6- فاصله بین نقاط $(3,6)$ و $(1,2)$ را دریابید.

7- فاصله بین نقاط $(3,7)$ و $(12,19)$ را دریابید.

دریافت کمیات وضعیه نقطه‌یی که یک قطعه خط را به یک نسبت تقسیم می کند.



آیا می‌توانید کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسـطی خـط مسـتقیم را کـه از نقـاط $A(3,1)$ و $B(-2,4)$ می گذرد دریابید؟

اگر کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p عبارت از (x, y) باشـد که خط مسـتقیم $\overline{P_1 P_2}$ را به نسبت r تقسیم می‌نماید یا $\frac{P_1P}{PP_2} = r$ باشد. از تشابه دو مثلث $P_1\overset{\Delta}{M}P$ و $P\overset{\Delta}{N}P_2$ داریم که:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{PM}{P_2N} = \frac{y-y_1}{y_2-y} = r$$
$$y-y_1 = ry_2 - ry$$
$$y+ry = ry_2 + y_1$$
$$(1+r)y = ry_2 + y_1$$
$$y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1M}{PN} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = r$$
$$x-x_1 = rx_2 - rx$$
$$x+rx = rx_2 + x_1$$
$$(1+r)x = rx_2 + x_1$$
$$x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

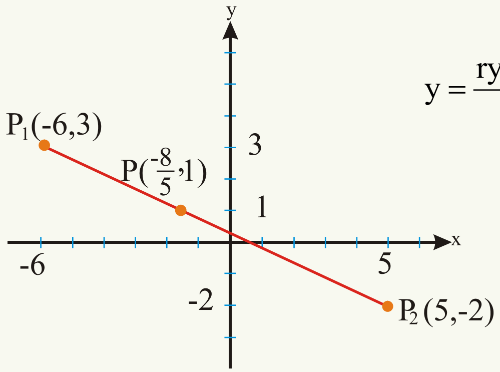
مثال 1: کمیـات وضعیه نقطهٔ P را در یابید، اگر خط مسـتقیمی که از نقاط $P_1\,(-6,3)$ و $P_2\,(5,-2)$ می گذرد به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم نماید. یا $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{2}{3}$ باشد.

حل

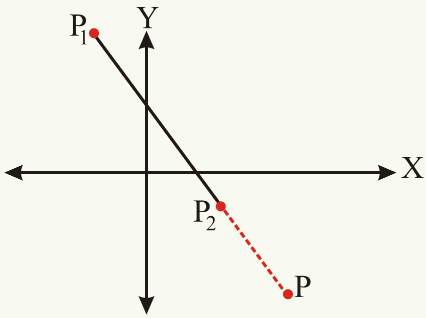
$$x_1 = -6 \qquad x_2 = 5 \qquad r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 5 - 6}{1+\frac{2}{3}} = -\frac{8}{5}$$

$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$



پس کمیات وضعیهٔ نقطهٔ $P(\frac{-8}{5},1)$ می‌باشد که خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌کند. متوجه باید بود که اگر نقطهٔ P، خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را داخلاً به یک نسبت تقسیم نماید $r>0$ و اگر خارجاً تقسیم کند $r<0$ می‌باشد. طور مثال: در شکل مشاهده می‌شود که نقطه p قطعه خط



$\overline{P_1P_2}$ را داخلاً به نسبت r تقسیم می‌کند یا به عبارت دیگر اگر P_1P و PP_2 هم جهت باشد $r>0$ و اگر نقطه P قطعه خط $\overline{P_1P_2}$ را خارجاً به نسبت r تقسیم کند یا $\overline{P_1P}$ و $\overline{PP_2}$ مختلف الجهت باشد $r<0$ می‌باشد.

در این صورت $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ می‌باشد طوری که در شکل فوق مشاهده می‌شود.

مثال2: کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p را دریابید، اگر خط مستقیمی که از نقاط $P_1(-8,4)$ و $P_2(2,-1)$ می‌گذرد.

a: داخلاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم نماید. b: خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم نماید.

حل a:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

پس کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p که خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را داخلاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌نماید عبارت از $(-4,2)$ می‌باشد.

b: چون نقطهٔ P قطعه خط $\overline{P_1P_2}$ را خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌نماید؛ پس:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

پس کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p که قطعه خطی $\overline{P_1P_2}$ را خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌کند عبارت از $(-28,14)$ می‌باشد.

فعالیت

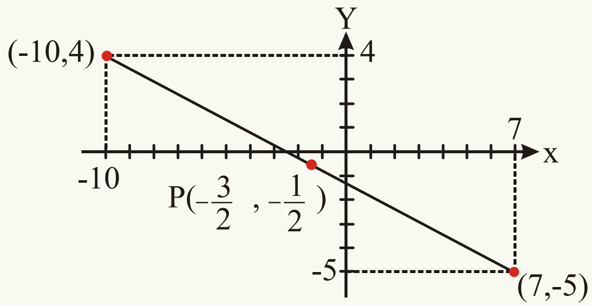
کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p را دریابید طوری که قطعه خطی را که از نقاط $A(4,6)$ و $B(-2,3)$ می‌گذرد، داخلاً به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کند.

اگر نقطهٔ p در وسط خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ واقع باشد در این صورت $r=1$ است و کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p عبارت است از: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ و $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

مثال3: کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی قطعه خطی که از نقاط $(-10,4)$ و $(7,-5)$ می‌گذرد، دریابید.

حل

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2} \qquad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2}$$



کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p که قطعه خط $\overline{P_1P_2}$ را به نسبت r تقسیم می کند، عبارت است از:

$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$, $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ و کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی قطعه خط P_1P_2 عبارت

است از $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ می‌باشد.

اگر نقطهٔ p قطعه خط $\overline{P_1P_2}$ را داخلاً به یک نسبت r تقسیم کند r مثبت واگر خارجاً تقسیم کند r منفی می‌باشد.

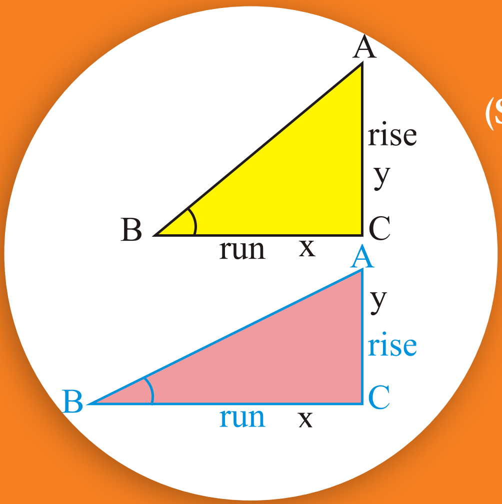
تمرین

1- کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی خط مستقیم $\overline{AB}$، عبارت از $(2,-1)$ می‌باشد، اگر نقطهٔ $A(-1,-3)$ باشد، کمیات وضعیهٔ نقطهٔ B را دریابید.

2- کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی قطعه خط را که از نقاط $A(3,1)$ و $B(-2,-4)$ می گذرد دریابید.

3- کمیات وضعیهٔ نقطه‌یی را دریابید که قطعه خطی را که از نقاط $A(4,6)$ و $B(-2,3)$ می گذرد.

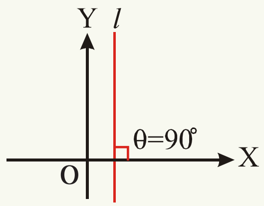
a : داخلاً به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کند.　　b: خارجاً به نسبت $\frac{1}{2}$ تقسیم کند.

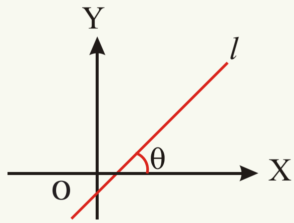


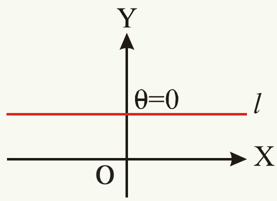
میل یک خط مستقیم
(Slope of a straight Line)

آیا گفته می‌توانید که میل کدام سطح مایل زیاد است؟

زاویهٔ □ که خط مستقیم l با جهت مثبت محور X می‌سازد. به نام زاویه میل خط مستقیم l یاد می‌شود.







طوری که در شکل مشاهده می‌شود، اگر خط مستقیم l با محور x موازی باشد 0 =□ و اگر با محور y موازی باشد °90 =□ می‌باشد.

وقتی که ما به یک سطح مایل (inclined plane) به طرف بالا حرکت می‌کنیم ما در عین وقت یک فاصلهٔ افقی (run) و یک فاصلهٔ عمودی (rise) را طی می‌کنیم. اگر میل یک خط مستقیم AB را به m نشان دهیم.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

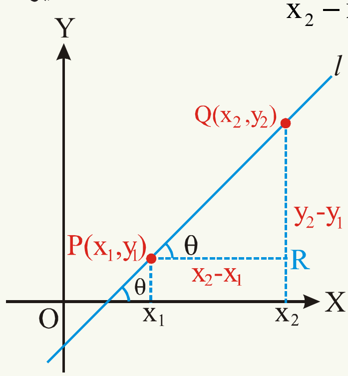
میل خط مستقیم عبارت از tan زاویه‌ایست که خط‌مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد. اگر $0 < \theta < 90°$ باشد میل خط مستقیم مثبت و اگر $90° < \theta < 180°$ باشد میل خط مستقیم منفی می‌باشد و اگر $\theta = 0$ باشد چون $\tan 0° = 0$ است؛ پس میل صفر و اگر $\theta = 90°$ باشد میل خط مستقیم تعریف نشده است، زیرا که $\tan 90°$ تعریف نگردیده است.

فعالیت

در مورد میل‌های محورهای X و Y چی فکر می کنید؟

میل خط مستقیم l که عمود نباشد و از دو نقطهٔ $P(x_1 y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ می‌گذرد، عبارت از:

$\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta = m$ است، زیرا طوری که در شکل مشاهده می‌شود:



$$R\hat{P}Q = \hat{\theta}$$
$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$
$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$
$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر سه نقطه A،B وC را طوری داشته باشیم که میل خط مستقیم $\overline{AB}$ مساوی با میل خط مستقیم $\overline{BC}$ باشد نقاط A،B و C روی عین خط مستقیم واقع اند و یا $AB // BC$ می‌باشد.

مثال1: میل خط مستقیمی‌را که از نقاط $P_1\ (2,4)$ و $P_2\ (6,10)$ می گذرد دریابید.

حل

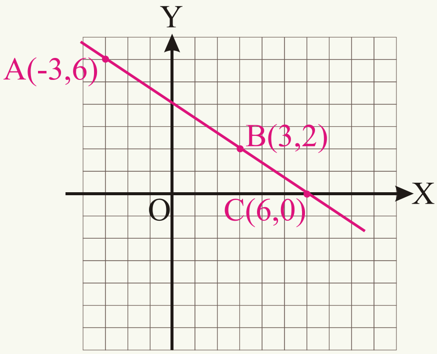
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یا

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

مثال2: نشان دهید که سه نقطه $A(-3,6)$ ، $B(3,2)$ و $C(6,0)$ بالای یک خط مستقیم واقع اند.

$$\text{میل خط مستقیم } \overline{AB} = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$



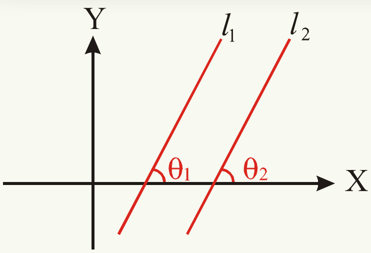
$$\overline{BC} \text{ میل خط مستقیم } = \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$$

چــون میل‌های خطوط $\overline{BC}$□$\overline{AB}$ مســاوی انــد. پــس نقــاط A،B وC بــالای یک خط مستقیم قرار دارند.

نتیجـه: میل در تمام نقاط خط مســتقیم باهم مساوی می‌باشد.

فعالیت

- میل خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $(-2,4)$ و $(5,1)$ می گذرد.
- با اســتفاده از میل خط مســتقیم نشان دهید که نقاط $(4,-5)$، $(7,5)$ و $(10,15)$ بالای یک خط مستقیم واقع اند.

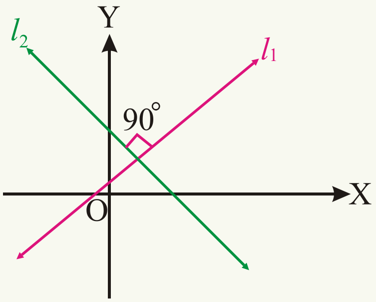


اگر l_1 و l_2 دو خط مستقیم باشند که میل‌های شان به ترتیب m_1 و m_2 باشد:

1- در صورتی که l_1 با l_2 موازی باشـد $m_1 = m_2$ است، زیرا که مطابق شکل $\theta_1 = \theta_2$ می‌باشد.

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$

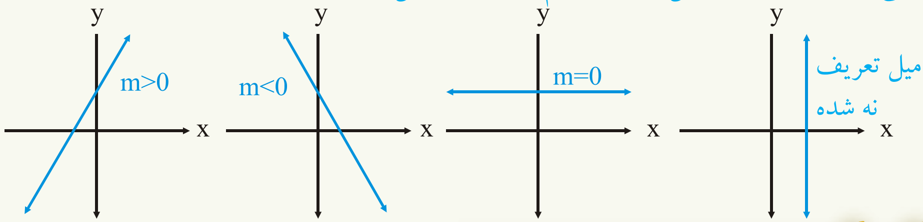


2- اگر l_1 و l_2 باهم عمود باشند:

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا $m_1 \cdot m_2 = -1$ می‌باشد.

میل یک خط مستقیم که از دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ می گذرد از فورمول

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ به دست می‌آید. میل محور X و خطوطی که با محور X موازی باشند، صفر و میل محور Y و خطوطی که موازی با محور Y باشند تعریف نشده است. اگر زاویهٔ میل یک خط مستقیم حاده باشد میل آن مثبت و اگر منفرجه باشد میل آن منفی می‌باشد و اگر زاویه میل خط مستقیم صفر باشد میل آن صفر است.



تمرین

1- میل خط مستقیمی‌را دریابید که از نقاط $(3,-2)$ و $(2,7)$ می‌گذرد.

2- اگر $A(8,6)$، $B(-4,2)$ و $C(-2,-6)$ رأس‌های یک مثلث باشند میل هر ضلع مثلث را دریابید.

3- با استفاده از میل خط مستقیم نشان دهید که نقاط $(a,2b)$، $(c,a+b)$ و $(2c-a,2a)$ بالای یک خط مستقیم واقع اند.

4- خط مستقیم $\overline{AB}$ از نقاط $A(1,-2)$ و $B(2,4)$ می‌گذرد و خط مستقیم $\overline{CD}$ از نقاط $C(4,1)$ و $D(-8,2)$ می‌گذرد این دو خط باهم:

a – موازی اند   b – عمود اند   c – هیچ کدام

5- خط مستقیم $y = 3$ و خط مستقیم $x = 3$ باهم:

a – موازی اند   b – عمود اند   c – هیچ کدام

6- خطوط مستقیم $x = -1$ و $x = 3$ باهم:

a – موازی اند   b – عمود اند   c – هیچ کدام

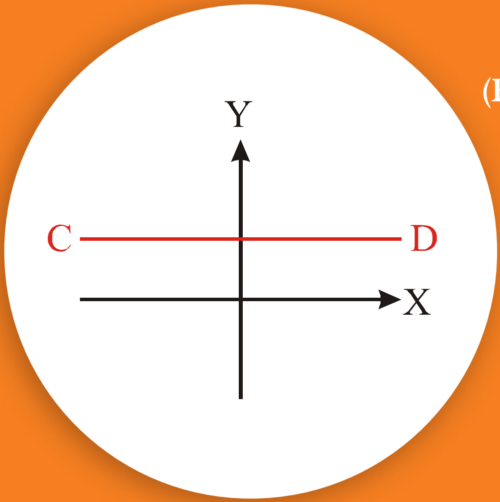
7- میل خط مستقیم $y = -\sqrt{3}$ مساوی است به

a- 1   b- صفر   c- -1 d- ∞

8- میل خط مستقیم $x = 0,03$ مساوی است به:

a- 1   b- صفر   c- -1 d- تعریف نشده است.

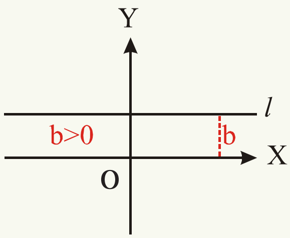
معادلۀ یک خط مستقیم
(Equation of a straight Line)



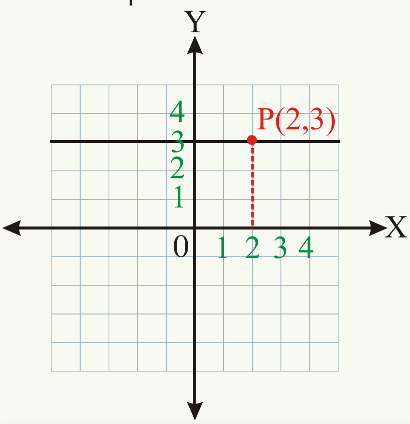
آیا می‌توانید معادلۀ خط مستقیم $\overline{CD}$ را که موازی با محور x است دریابید؟

1- معادلۀ خط مستقیمی که موازی با محور X باشد

تمام نقاطی که بالای خط مستقیم l واقع باشند از محور X فاصله‌های مساوی دارند یا به عبارت دیگر، مختصۀ y تمام نقاطی که بالای خط مستقیم موازی با محور X واقع باشند باهم مساوی است. اگر فاصله بین خط l و محور x را b بنامیم معادلۀ خط مستقیم عبارت از $y = b$ می‌باشد.



اگر $b > 0$ باشد خط مستقیم l فوق محور X و اگر $b < 0$ باشد خط l پایین محور X و اگر $b = 0$ باشد خط l بالای محور X واقع می‌باشد.



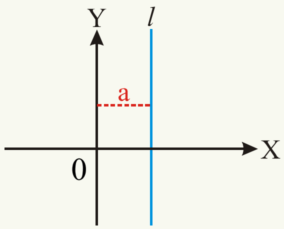
مثال 1: معادلۀ خط مستقیمی را که از نقطۀ $(2,3)$ می‌گذرد و با محور X موازی باشد، دریابید.

حل: $y = 3$ معادلۀ این خط می‌باشد.

فعالیت

معادلۀ محور X را بنویسید.

2- معادلهٔ خط مستقیمی که با محور Y موازی باشد: تمام نقاطی که بالای خط مستقیم l که با محور Y موازی است واقع باشند، فاصلهٔ آن‌ها از محور Y مساوی می‌باشند؛ اگر فاصلهٔ خط l از محور Y را a بنامیم که a مختصهٔ اول این نقاط می‌باشد، پس معادلهٔ خط مستقیم l عبارت از $x = a$ می‌باشد.



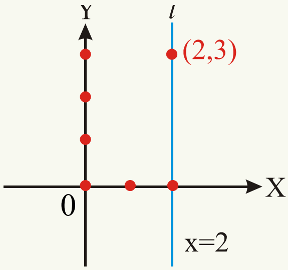
اگر $a > 0$ باشد خط l به طرف راست محور Y واقع است.

اگر $a < 0$ باشد خط l به طرف چپ محور Y قرار دارد و

اگر $a = 0$ باشد خط l بالای محور Y قرار دارد.

مثال 2: معادلهٔ خط مستقیمی‌را که از نقطهٔ $(2,3)$ می گذرد و با محور Y موازی باشد، دریابید.

حل: $x = 2$ معادلهٔ این خط می‌باشد.



فعالیت

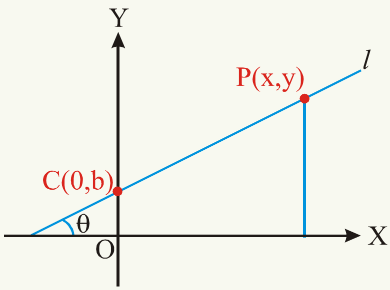
معادلهٔ محور Y را بنویسید.

3- معادلهٔ خط مستقیمی که میل و نقطهٔ تقاطع آن با محور Y معلوم باشد (معادلهٔ معیاری خط مستقیم)

اگر $P(x, y)$ یک نقطهٔ خط مستقیم l باشد و $C(0,b)$ نقطهٔ تقاطع این خط مستقیم با محور Y باشد در این صورت، میل خط مستقیم l عبارت است از:

$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y-b = mx \quad \text{یا} \quad y = mx + b$$



اگر $b = 0$ باشد معادلهٔ خط مستقیم $y = mx$ می‌باشد که در این صورت، خط مستقیم از مبدأی کمیات وضعیه می گذرد.

مثال3: معادلهٔ خط مستقیمی‌را دریابید که:

a- میل آن 2 و محور Y را در 5 قطع کند.

b- محور Y را در $\frac{4}{3}$ قطع کند و عمود بر خطی باشد که میل آن (-6) باشد.

حل

a: $m = 2$ و $b = 5$

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$$

b: میل این خط مستقیم عبارت از $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$

و$b = \frac{4}{3}$ $m = \frac{1}{6}$ بوده؛ پس:

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

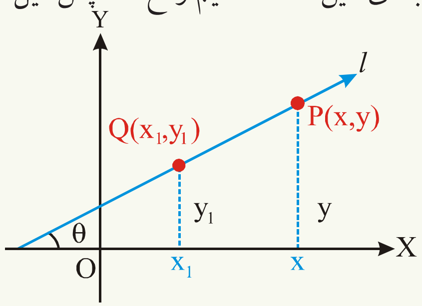
که این معادله را به اشکال $6y = x + 8$، $6y - x = 8$ و یا $x - 6y + 8 = 0$ می‌توان نوشت.

4- معادلهٔ خط مستقیمی که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد

معادلهٔ خط l که میل آن m و از نقطهٔ $Q(x_1, y_1)$ می گذرد.

اگر $p(x, y)$ یک نقطهٔ اختیاری خط مستقیم l باشد. چون نقاط $Q(x_1, y_1)$ و $P(x, y)$ بالای عین خط مستقیم واقع اند، پس میل این خط مستقیم مساوی است به:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



مثال4: معادلهٔ خطی مستقیمی‌را دریابید که میل آن (-2) و از نقطهٔ $(5,1)$ می گذرد.

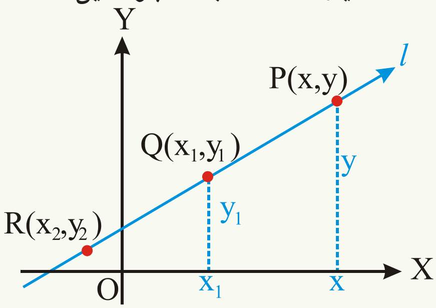
حل

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-2(x-5)$$
$$y=-2x+11$$

یا $2x+y-11=0$

5- معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد

میل خط l که عمود نباشــد و از نقاط $Q(x_1,y_1)$ و $R(x_2,y_2)$ می گذرد و $P(x,y)$ یک نقطه اختیاری خط l باشد چون میل خط مستقیم در هر نقطه با هم مساوی می‌باشد؛ پس:



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

مثال5: معادلهٔ خط مستقیمی‌را دریابید که از نقاط $(-2,1)$ و $(6,-4)$ می گذرد.

حل

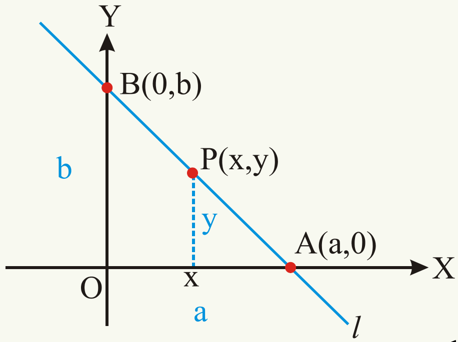
$$y_1=1, x_1=-2, y_2=-4, x_2=6$$

$$y-1=\frac{-4-1}{6-(-2)}[x-(-2)]$$

$y-1=\dfrac{-5}{8}(x+2)$ یا $5x+8y+2=0$

6: معادلهٔ خط مستقیمی که نقطهٔ تقاطع آن با محورها معلوم باشد

اگر $P(x,y)$ یک نقطهٔ اختیاری خط مستقیم l باشد و خط مستقیم l محور X را در a و محور Y را در b قطع کند یا محور X را در نقطهٔ $A(a,0)$ و محور Y را در نقطهٔ $B(0,b)$ قطع می کند. در این صورت، نقاط A، B و P بالای خط مستقیم l واقع اند، با استفاده از فورمول خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد داریم که: $x_2=0, y_2=b$ $x_1=a$, $y_1=0$ می‌باشد.



$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ ,\ y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)\Rightarrow -ay=b(x-a)$$

$$-ay=bx-ab$$

هردو طرف مساوات را بر ab تقسیم می کنیم:

$$bx+ay=ab$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

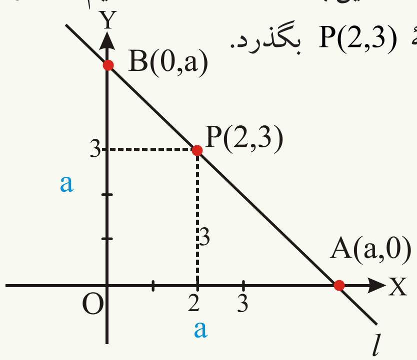
مثال6: معادلهٔ خط مستقیمی‌را دریابید که محور X را در (2,0) و محور Y را در (0,−4) قطع می کند.

حل: $a=2$ و $b=-4$ می‌باشد.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$$ یا $$2x-y-4=0$$

مثال7: در شکل اگر مثلث $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی‌الساقین باشد، معادلهٔ خط مستقیم $\overline{AB}$ را در صورتی دریابید که ضلع $\overline{AB}$ این مثلث از نقطهٔ P(2,3) بگذرد.



حل: میل خط $\overline{AB}$ مساوی است به:

میل خط مستقیم $\overline{AB}=\dfrac{a-0}{0-a}=-1$

اکنون معادلهٔ خط مستقیمی که میل آن (-1) و از نقطهٔ $P(2,3)$ می گذرد عبارت است از:

$$y-3=-1(x-2) \quad \text{یا} \quad x+y-5=0$$

معادلهٔ خط مستقیمی که یک نقطه و تقاطع آن با محور y معلوم باشد عبارت از $y=mx+b$ می‌باشد.

معادلهٔ خط مستقیمی که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد $y-y_1=m(x-x_1)$ است.

معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ و معادلهٔ خط مستقیمی که نقاط تقاطع آن با محورها معلوم باشد. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ می‌باشد.

تمرین

1- معادله‌های خطوط مستقیم زیر را دریابید:

a: معادلهٔ خط موازی با محور X که از نقطه $(7,-9)$ می گذرد.

b: معادلهٔ خط عمود بر محور X که از نقطه $(-5,3)$ می گذرد.

2- معادله‌های خطوط مستقیم زیر را دریابید:

a: که میل آن 7 و از نقطه $(-6,5)$ بگذرد.

b: میل آن صفر و از نقطه $(8,-3)$ بگذرد.

c: از نقطهٔ $(-8,5)$ بگذرد و میل آن تعریف نشده باشد.

d: که از نقاط $(-5,-3)$ و $(9,-1)$ بگذرد.

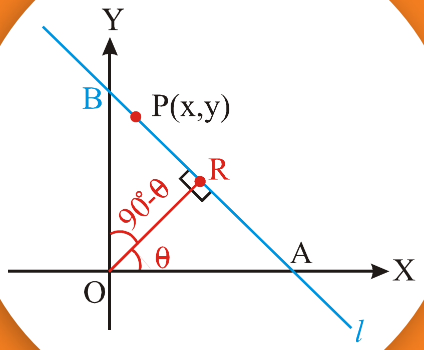
e: که میل آن -4 و محور Y را در -9 قطع کند.

3- معادله‌های اضلاع مثلث را دریابید که رأس‌های آن $A(-3,2)$، $B(5,4)$ و $C(3,-8)$ باشند.

4- معادلهٔ خط مستقیمی‌را بنویسید که از نقطهٔ $(-4,-6)$ می‌گذرد و عمود بر خطی باشد که میل آن $\dfrac{-3}{2}$ می‌باشد.

5- معادلهٔ خط مستقیمی‌را بنویسید که از نقطه $(11,-5)$ بگذرد و موازی با خطی باشد که میل آن (-24) می‌باشد.

۷- معادلهٔ نورمال یک خط مستقیم



آیا می‌توانید بگویید که خط نورمال یک خط مستقیم عبارت از کدام خط مستقیم می‌باشد؟

معادلهٔ خط مستقیم l که طول خط عمود ازمبدأی کمیات وضعیه بالای خط l عبارت از p باشد و θ زاویه میل خط عمود باشد عبارت است از:

$x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta = P$

خط مستقیم l محور X را در نقطهٔ A و محور Y را در نقطهٔ B قطع می‌کند؛ اگر $P(x, y)$ یک نقطهٔ اختیاری خط $\overline{AB}$ باشد و خط مستقیم $\overline{OR}$ عمود بر خط l باشد، پس $|\overline{OR}| = P$ که خط مستقیم $\overline{OR}$ را نورمال خط l می‌گویند که P طول نورمال می‌باشد.

از مثلث‌های قایم‌الزاویه $O\overset{\Delta}{R}A$ و $O\overset{\Delta}{R}B$ داریم که:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \text{ یا } OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{P}{OB} \text{ یا } OB = \frac{P}{\cos(90° - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

از مثلثات می‌دانیم که: $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ می‌باشد.

چون خط مستقیم $\overline{AB}$ محور X را در $(OA,0)$ و محور Y را در $(0,OB)$ قطع می‌کند؛ پس معادلهٔ خط مستقیم $\overline{AB}$ عبارت است از:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}} + \frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}} = 1$$

یا

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

که $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ عبارت از معادلهٔ نورمال خط مستقیم l می‌باشد.

مثال 1: اگر طول خط عمود بر یک خط مستقیم l از مبدأی کمیات وضعیه مساوی به 5 واحد باشد و زاویهٔ میل خط عمود (نورمال) $120°$ باشد میل خط مستقیم l و معادلهٔ نورمال و نقطهٔ تقاطع آن با محور Y را دریابید.

حل: $\theta = 120°$ و $P = 5$ می‌باشد.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5 \qquad (\cos120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

برای دریافت میل خط l معادله را به شکل $y = mx + b$ می‌نویسیم.

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

پس میل خط l، $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و محور Y را در نقطهٔ $(0, \frac{10}{\sqrt{3}})$ قطع می‌کند.

فعالیت

معادلهٔ نورمال خط مستقیم را دریابید که طول نورمال آن 10 واحد و نورمال با جهت مثبت محور X زاویهٔ $30°$ را بسازد.

8- معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم: (General equation of a straight Line)

معادلهٔ $ax + by + c = 0$ دارای دومتحول x و y است، درحالی که a، b و c اعداد ثابت می‌باشند. (a و b همزمان باید صفر نباشند) به نام معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم یاد می‌شوند.

1) اگر $a \neq 0$ و $b = 0$ باشد $\quad ax + c = 0$ یا $x = -\frac{c}{a}$

این معادلهٔ خط مستقیمی‌می‌باشد که با محور y موازی است. فاصلهٔ مستقیم این خط از محور

Y عبارت از $-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

2) اگر $a=0$ و $b\neq 0$ باشد معادلهٔ شکل $by+c=0$ را به خود می گیرد یا $y=-\frac{c}{b}$
این معادلهٔ خط مستقیمی‌می‌باشـد که با محور X موازی اسـت و فاصلهٔ مسـتقیم این خط از

محور X عبارت از $\frac{-c}{b}$ می‌باشد.

3) اگر $a\neq 0$ و $b\neq 0$ باشد

$$by=-ax-c \text{ یا } y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}=mx+b$$

معادلهٔ خطی است که میل آن $m=\frac{-a}{b}$ و محور y را در $\frac{-c}{b}$ قطع می کند.

1-تبدیل معادلهٔ عمومی‌یک خط مستقیم به شکل معادلهٔ معیاری آن

معادلهٔ عمومی $ax+by+c=0$ به شکل معادلهٔ معیاری یک خط مستقیم عبارت است از:

$$by=-ax-c \text{ یا } y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}=mx+b$$

که میل این خط $m=\frac{-a}{b}$ و محور Y را در $\frac{-c}{b}$ قطع می کند.

مثال2: معادلهٔ عمومی‌خط مستقیم $5x-12y+39=0$ را به شکل معیاری تبدیل نمایید.
حل

$$12y=5x+39 \quad \text{ یا } \quad y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

که میل آن $m=\frac{5}{12}$ و محور Y را در $\frac{39}{12}$ قطع می کند.

2- تبدیل معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم به شکل معادلهٔ خط مستقیمی که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد

در معادلهٔ $ax+by+c=0$ که میل آن $\frac{-a}{b}$ و یک نقطه آن $(\frac{-c}{a},0)$ می‌باشد؛ پس:

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a}) \qquad m=\tan\theta=\frac{-a}{b}$$

مثال3: معادلهٔ عمومی خط مستقیم $5x-12y+39=0$ را به شکل معادلهٔ خط مستقیمی تبدیل کنید که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد.

حل: یک نقطهٔ خط مستقیم $5x-12y+39=0$ عبارت از $(\frac{-39}{5},0)$ می‌باشد. ومیل خط $\frac{5}{12}$ است؛ پس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3- تبدیل معادلهٔ عمومی به شکل معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد

خطی که معادلهٔ آن $ax+by+c=0$ است از نقاط $(\frac{-c}{a},0)$ و $(0,\frac{-c}{b})$ می‌گذرد.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

مثال4: معادلهٔ عمومی خط مستقیم $5x-12y+39=0$ را به شکل معادلهٔ خط

مستقیمی‌بنویسید که دو نقطهٔ آن معلوم باشد.

حل: خط $5x-12y+39=0$ از نقاط $P_2(0,\frac{39}{12})$ و $P_1(\frac{-39}{5},0)$ می گذرد.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- تبدیـل معادلهٔ عمومی‌یک خط مسـتقیم به شـکل معادلهٔ خط مسـتقیمی‌که نقاط تقاطع آن با محورهای X و Y معلوم باشد

$$ax+by+c=0$$
$$ax+by=-c$$

اطراف را بالای $(-c)$ تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

مثال5: معادلهٔ $5x-12y+39=0$ را به شکل معادله خط مستقیمی‌که نقاط تقاطع آن با محورهای X و Y معلوم باشد تبدیل نمایید.

$$5x-12y=-39$$

اطراف را بر -39 تقسیم می کنیم.

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

بدین معنی که این خط مستقیم محور X را در نقطه $(-\frac{39}{5},0)$ و محور Y را در نقطه $(0,\frac{39}{12})$ قطع می کند.

فعالیت

کمیات وضعیۀ نقاط تقاطع خط $3x-2y=6$ را با محورهای X و Y، دریابید.

5: تبدیل معادلۀ عمومی‌یک خط مستقیم به شکل نورمال آن

چون می‌دانیم که معادلۀ خط مستقیم به شکل نورمال $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ می‌باشد.
و معادلـۀ عمومی‌یک خط مسـتقیم عبارت از $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ بوده که هردوی آن نشان دهندۀ عین خط مستقیم می‌باشند؛ پس نسبت‌های ضرایب آن‌ها مساوی به یک عدد ثابت K می‌باشند.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

زیرا که: $\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$

در نتیجه: $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌شود.

در معادلـۀ $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ با عوض کـردن قیمت‌های $\sin\theta$ و $\cos\theta$ داریم که:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ویا $\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$

پس: $k\sin\theta = b$ ، $k\cos\theta = a$ ، $k^2\sin^2\theta = b^2$ ، $k^2\cos^2\theta = a^2$

$$k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta = a^2 + b^2$$
$$k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2$$

یا:

$$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

هر دو طرف معادله $ax + by = -c$ را به K تقسیم می‌نماییم، داریم که:

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \text{ یا } \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}y = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای این که قیمت p هروقت مثبت است علامت مخرج جذر مخالف علامت c می‌باشد.

اگر $c = 0$ باشد علامت جذر مطابق علامهٔ b می‌باشد

مثال6: معادله $2x - 3y + 6 = 0$ را به شکل نورمال آن تبدیل نمایید.

حل: هر دو طرف معادله را بر $\sqrt{2^2 + (-3^2)} = \pm\sqrt{13}$ تقسیم می‌نماییم برای این که طرف راست مساوات مثبت باشد علامت $\sqrt{13}$ باید منفی در نظر گرفته شود.

$$\frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = 0 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

پس θ در ناحیهٔ دوم قرار دارد.

نظر به جدول مثلثاتی $\theta = 123^\circ 40'$

معادلهٔ نورمال خط مستقیم عبارت است از:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

فعالیت

معادلهٔ خط مستقیم $5x - 12y + 39 + 0$ را به شکل نورمال تبدیل کنید.

معادلهٔ نورمال یک خط مستقیم عبارت از $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ و معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم عبارت از $ax + by + c = 0$ می‌باشد.

معادلهٔ عمومی خط مستقیم به شکل نورمال آن عبارت است از:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

تمرین

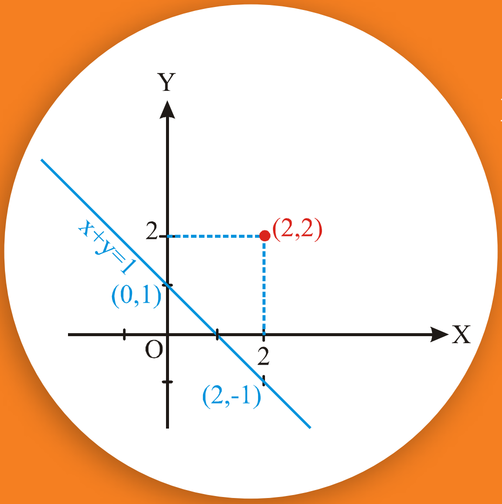
1- معادلهٔ نورمال خط مستقیم $x\cos 60°+y\sin 60°-7=0$ را به شکل معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم تبدیل نمایید.

2- معادلهٔ نورمال یک خط مستقیم $x\cos 225°+y\sin 225°-6=0$ را به شکل معادلهٔ عمومی یک خط مستقیم تبدیل نمایید.

3- معادله‌های عمومی یک خط مستقیم که در زیر داد شده اند به شکل معادلهٔ نورمال تبدیل نمایید:

$2x+4y+7=0$ $\qquad$ $2x+5y-2=0$ $\qquad$ $15y-8x+3=0$

فاصلۀ یک نقطه از یک خط مستقیم
Distance of a point from a) (line



آیا فاصلۀ نقطۀ $(2,2)$ را از خط مستقیمی که معادلۀ آن $x+y=1$ باشد دریافت کرده می توانید؟

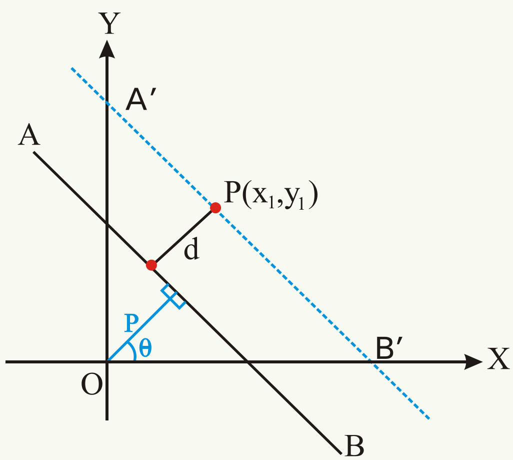
اگـر فاصلـۀ نقطۀ P را از خط $\overline{AB}$، d در نظر بگیریم؛ طوری که نقطۀ P بالای خط $\overline{AB}$ واقع نباشد. (خط $\overline{AB}$ نه خط عمودی و نه افقی باشد).

از نقطۀ p خط $A'B'$ را موازی با $\overline{AB}$ رسـم کنید. در این صورت، معادلۀ نورمال خط AB عبارت است از $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

چون خط مسـتقیم $A'B'$ با خط مسـتقیم AB موازی است، پس معادلۀ نورمال خط $A'B'$ عبارت است از: $x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0$ یا $d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$

چون نقطۀ $P(x_1, y_1)$ روی خط مسـتقیم $\overline{A'B'}$ قرار دارد در معادلۀ فوق عوض x و y به ترتیب x_1 و y_1 را عوض می کنیم داریم که:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



ایـن معادله، فاصلۀ نقطـۀ p را از خط $\overline{AB}$ نشـان می‌دهـد در صورتی که معادلـۀ خـط مسـتقیم AB به شـکل نورمال داده شـده باشـد و اگر معادلۀ خط مسـتقیم $\overline{AB}$ به شـکل عمومی $(ax+by+c=0)$ داده شده باشد، پس:

چون $\sin\theta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ و $P = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

اگر این قمیت‌ها را در معادله نورمال خط مستقیم AB عوض کنیم داریم که:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

در معادلـۀ فاصله اگر نقطـۀ P و مبدأی کمیات وضعیه به یک طرف خط AB واقع باشـد قیمت d منفی می‌شـود و در صورتی که نقطۀ p و مبدأ به دو طرف خط مسـتقیم AB واقع باشـد قیمت d مثبت می‌شـود. چون فاصله، هر وقت مثبت اسـت باید قیمـت مطلقۀ آن در نظر گرفته شود. (علامت c مخالف علامت جذر مخرج می‌باشد)

مثال1: فاصلۀ نقطۀ $P(-2,8)$ را از خط مستقیم $4x+3y-11=0$ دریابید.

حل: $a=4$، $b=3$ و $c=-11$ چون علامه c منفی است باید علامه جذر مثبت باشد.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

فاصلۀ نقطۀ (5,8) را از خط مستقیم $3x-2y+7=0$ دریابید.

فاصله بین دو خط موازی(Distance between two parallel lines)

فاصلـۀ بین دو خط مـوازی عبارت از فاصله در بین یک نقطه بـالای یکی از خطوط و خط موازی دیگری می‌باشد

مثال2: فاصله بین دو خط مسـتقیم موازی $2x-5y+13=0$ و $2x-5y+6=0$ را دریابید.

حل: یک نقطه را بالای یکی از خطوط موازی در می‌یابیم؛ طور مثال: اگر در معادلۀ

$2x-5y+13=0$

$x=1$ باشد $y=3$ می‌شود. حال فاصلۀ نقطۀ (1,3) را از خط مستقیم $2x-5y+6=0$

توسط فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آوریم.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادداشت: فاصلهٔ خط مستقیم $ax+by+c=0$ از مبدأی کمیات وضعیه $(0,0)$ عبارت از $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

فعالیت

فاصله بین دو خط موازی $3x+2y=10$ و $y=-\frac{3}{2}x+7$ را دریابید.

مثال3: فاصله بین دو خط موازی $2x+y+2=0$ و $6x+3y-8=0$ را دریابید.

حل: اگر در معادلهٔ $2x+y+2=0$، $x=0$ شود $y=-2$ می شود. اکنون فاصله نقطهٔ $(0,-2)$ را از خط مستقیم $6x+3y-8=0$ به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_1,y_1)$ از یک خط مستقیم از فورمول $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p$ و یا $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می آید.

تمرین

1– فاصلهٔ بین هر جوره خطوط موازی را که معادله‌های آن قرار زیر می‌باشد دریابید:

$3x-4y+7=0$ و $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ و $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ و $x+2y-5=0$

2– فاصلهٔ نقطهٔ $P(6,-1)$ را از خط $6x-4y+9=0$ دریابید.

3– فاصله بین دو خط موازی $3x+6y-8=0$ و $2x+4y+5=0$ مساوی است به:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هیچکدام

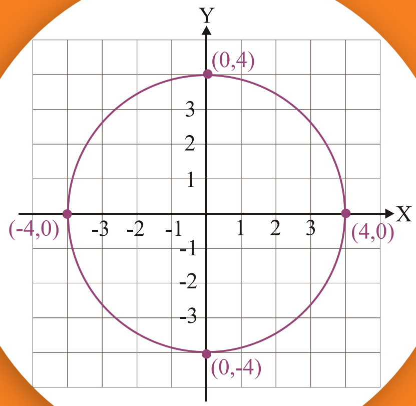
4– فاصله بین نقطهٔ $(1,2)$ از خط مستقیم $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ عبارت است از:

a : 2   b : 1   c : 3   d : $\frac{1}{2}$

5– فاصله بین نقطهٔ $(-2,7)$ و خط مستقیم $24x+7y-2=0$ مساوی است به:

a : 0,04   b : $\frac{1}{25}$ c : $4x10^{-2}$ d : هر سه درست اند

دایره(Circle)



آیـا معادلهٔ دایره‌یی را می‌توانید دریابید که مرکـز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع و شعاع آن 4 واحد باشد؟

تعریف

دایره، ست نقاطی می‌باشند که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ مستقر ثابت باشد. نقطهٔ مستقر مرکز (Center) دایره و فاصلهٔ مساوی عبارت از شعاع (Radius) دایره می‌باشد.

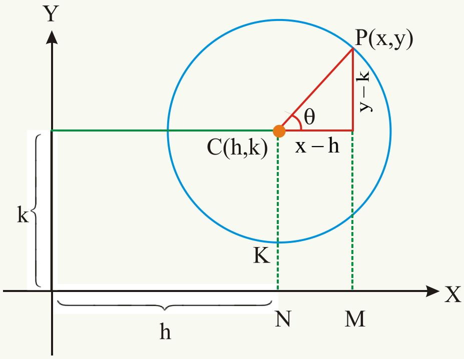
معادلهٔ یک دایره (Equation of a circle): اگر $C(h,k)$ مرکز دایره، r شعاع دایره و $P(x,y)$ یک نقطه از محیط دایره باشد.

مطابق شکل با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث داریم که:

$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

معادلهٔ فوق، معادلهٔ معیاری دایره می‌باشد؛ اگر مرکز دایره در مبدأی کمیات وضعیه باشد در آن صورت $h = k = 0$ اســت و معادلهٔ دایره عبــارت از $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یا $x^2 + y^2 = r^2$ می‌باشد.



اگر $r = 0$ باشــد دایره را دایــرهٔ نقطوی (Point circle) می‌گویند.

مثال 1: معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که مرکز آن $(-3,5)$ و طول شعاع آن (7) واحد باشد.

حل: $r=7$ ، $k=5$ و $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$
$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعالیت

معادلهٔ دایره‌یی را بنویسید که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع و شعاع آن 3 واحد باشد.

شکل عمومی معادلهٔ دایره (General form of an equation of a circle)

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

یا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

اگر $-k=f$ ، $-h=g$ و $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شود داریم که:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \text{یا} \quad (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

و این معادله را معادلهٔ عمومی دایره می‌گویند که مرکز دایره $(-g,-f)$ و شعاع آن $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ می‌باشد.

اگر $g^2+f^2-c>0$ باشد دایرهٔ حقیقی وجود دارد.

اگر $g^2+f^2-c=0$ باشد دایره، نقطوی است.

اگر $g^2+f^2-c<0$ باشد دایره، مجازی است (وجود ندارد)

و یا اگر در معادلهٔ $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

$-2h=a$ ، $-2k=b$ و $h^2+k^2-r^2=c$ قرار داده شود داریم که:

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ این معادلهٔ عمومی یک دایره نیز می‌باشد.

بعضی اوقات، معادلهٔ عمومی یک دایره را به شکل $Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ نیز نشان می‌دهند در صورتی که $A=B$ و هم‌علامه باشند.

حالات خاص

1- اگـر در معادلـهٔ دایره $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ قیمت $h=0$ باشـد، مرکز دایره بالای محور Y واقع است و شکل معادلهٔ دایره $x^2+(y-k)^2=r^2$ می‌باشد.

2- اگـر $k=0$ باشـد مرکـز دایـره بـالای محـور X واقـع اسـت و معادلـهٔ دایـره $(x-h)^2+y^2=r^2$ می‌باشد.

3- اگر $k=r$ باشد دایره با محور X مماس بوده و معادلهٔ دایره، $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ می‌باشد.

4- اگر $h=r$ باشد دایره با محور Y مماس بوده و معادلهٔ دایره، $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ می‌باشد.

5- یـک دایره در آن صورت از مبدأی کمیات وضعیه می گذرد که رابطهٔ $h^2+k^2=r^2$ را صدق کند.

6- یـک دایره در آن صـورت بالای محورهای X و Y مماس می‌باشـد که معادلهٔ آن به شکل، $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ باشد.

مثال 2: مرکز دایرهٔ $x^2+(y-5)^2=10$ بالای محور Y قرار دارد.

دایرهٔ $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ بامحور X مماس می‌باشد.

مرکز دایرهٔ $(x+3)^2+y^2=9$ بالای محور X قرار دارد.

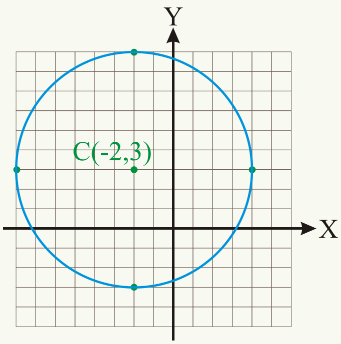
فعالیت

در شکل نشان دهید که در مثال دوم مرکز دایرهٔ اولی بالای محور Y قرار دارد، دایرهٔ دومی با محور X مماس می‌باشد و مرکز دایرهٔ دومی بالای محور X قرار دارد.

مثال 3: معادلهٔ عمومی و معیاری دایره‌یی را بنویسید که کمیات وضعیهٔ مرکز آن $(-2,3)$ و شـعاع آن 6 واحد باشد و نیز این دایره را رسم کنید:

معادلهٔ معیاری دایره $(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$

معادلهٔ عمومی‌دایره $x^2+y^2+4x-6y-23=0$



مثال4: نشان دهید که $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ معادلهٔ یک دایره بوده و نیز کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع آن را دریابید.

حل: هردو طرف معادله را بر 5 تقسیم می‌نماییم داریم که:

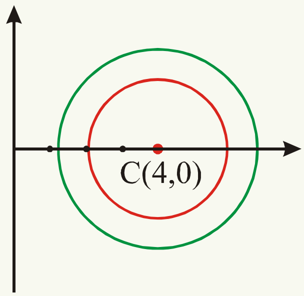
$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

که: $g=\frac{12}{5}$، $f=\frac{18}{5}$ و $c=2$ می‌باشد.

(مرکز دایره) $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

شعاع دایره: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

مثال 5: معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که با دایرهٔ $x^2+y^2-8x+4=0$ متحدالمرکز (Concentric) بوده و با خط $x+2y+6=0$ مماس باشد.



حل: مرکز دایرهٔ $x^2+y^2-8x+4=0$ عبارت از $C_1(-g,-f)$ بوده که در معادله $:x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$
$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

نقطهٔ $C_1\,(4,0)$ مرکز آن دایره نیز می‌باشد که معادلهٔ آن مطلوب است.

کمیات وضعیهٔ C_1 را در معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ وضع می‌نماییم:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

برای این‌که شعاع دایره C_2 را دریابیم، چون دایره با خط مستقیم $x+2y+6=0$ مماس است، پس فاصلهٔ نقطهٔ (4,0) از این خط مستقیم عبارت از شعاع دایره می‌باشد.

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \text{ یا } r^2=\frac{100}{5}=20$$

پس معادلهٔ دایرهٔ مطلوب $(x-4)^2+y^2=20$ یا $x^2+y^2-8x-4=0$ می‌باشد.

مثال 6: معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که از نقاط $B(6,5)$ و $A(4,1)$ می‌گذرد و مرکز آن بالای خط مستقیم $4x+y-16=0$ واقع باشد.

حل: اگر مرکز دایره $C(h,k)$ باشد، معادلهٔ دایره عبارت از:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ می‌باشد، چون مرکز دایره بالای خط مستقیم $4x+y-16=0$ قرار دارد، پس $4h+k=16$ است $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ و $|AC|=|BC|$ و $|AC|^2=|BC|^2$ می‌باشد.

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h \pm k=\pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

که معادلهٔ عمومی دایره مطلوب می‌باشد.

فعالیت

معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که از نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد و با خط مستقیم $y-1=0$ مماس باشد.

مثال 7: کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع دایره $x^2+y^2-4x+4y-9=0$ را دریابید.

حل

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

پس مرکز دایره $(2,-2)$ و شعاع دایره $r=\sqrt{17}$ می‌باشد.

معادلهٔ دایره‌یی که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع باشد عبارت از $x^2+y^2=r^2$
و اگر مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع نباشد و کمیات وضعیهٔ مرکز دایره (h,k)
باشد معادلهٔ آن $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$
و یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ می‌باشند.

تمرین

1 – معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که اگر:

a) مختصات مرکز آن $(5,-2)$ و $r=4$ باشد.

b) مختصات مرکز آن $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ و شعاع آن $r=2\sqrt{2}$ باشد.

c) مختصات مرکز آن $(0,0)$ و از نقطهٔ $(1,2)$ بگذرد.

d) مختصات مرکزآن $(0,0)$ و از نقطهٔ $(-3,-4)$ بگذرد.

e) مختصات مرکز آن $(8,-6)$ و از مبدأ کمیات وضعیه بگذرد.

2 – نخست نشان دهید که معادلات داده شدهٔ زیر، معادله‌های دایره می‌باشند بعد کمیات وضعیهٔ مرکز و طول شعاع هریک از آن‌ها را دریابید.

$5x^2+5y^2+14x+12y=0$

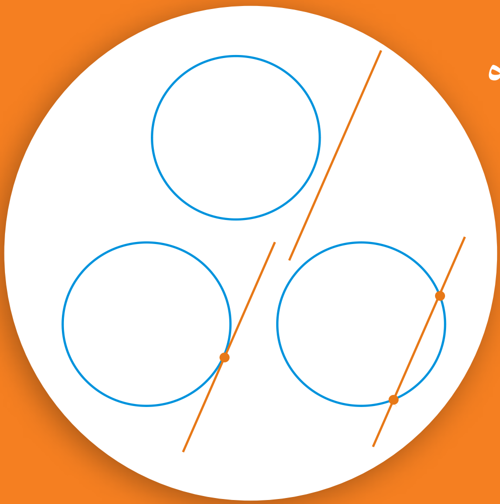
$x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$

$x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

حالات یک خط مستقیم با دایره



آیا می‌توانید بگویید که خط مستقیم
$3x-4y+20=0$ دایرهٔ $x^2+y^2=25$
را در چند نقطه قطع می‌کند؟

معادلهٔ دایرهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ را در نظر می‌گیریم. حالات یک خط مستقیم را با دایرهٔ مذکور مورد مطالعه قرار می‌دهیم که آیا خط مستقیم، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند، خط با دایره مماس می‌باشد و یا این‌که خط مستقیم، دایره را هیچ قطع نمی‌کند.

قیمت x و یا y را از معادلهٔ خط مستقیم به دست آورده، در معادلهٔ دایره وضع می‌نماییم در این‌صورت معادلهٔ درجه دوم یک مجهوله به دست می‌آید.

1) اگر در این معادله $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

2) اگر $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد خط مستقیم با دایره مماس می‌باشد.

3) و اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ باشد خط مستقیم دایره را قطع نمی‌کند.

مثال 1: آیا خط مستقیم $2x=y+7$ دایرهٔ $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ را قطع می‌کند؟ کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع را دریابید.

حل: از معادلهٔ خط مستقیم $y=2x-7$ قیمت y را در معادلهٔ دایره وضع می‌کنیم.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

یا $x^2-8x+15=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot 15=64-60=4>0$$

پس خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می‌کند که کمیات وضعیهٔ نقاط تقاطع عبارت اند از:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

برای یافتن قیمت y قیمت‌های $x_1 = 5$ و $x_2 = 3$ را در معادلهٔ خط مستقیم وضع می کنیم داریم که:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$
$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2 \cdot 3 - 7 = -1$$

پس این خط مستقیم دایره را در نقاط $(3,-1)$ و $(5,3)$ قطع می کند.

مثال2: آیا خط مستقیم $x + 3y - 5 = 0$ با دایرهٔ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ مماس می‌باشد یا خیر؟

حل: از معادلهٔ خط مستقیم $x = 5 - 3y$ قیمت x را در معادلهٔ دایره وضع می کنیم.

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

و $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ پس این خط مستقیم با دایره مماس می‌باشد. کمیات وضعیهٔ نقطهٔ تماس عبارت اند از:

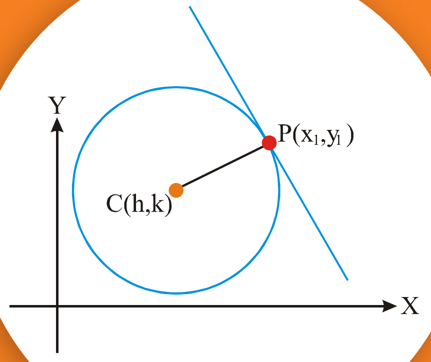
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$
$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

پس خط مستقیم در نقطهٔ $(2,1)$ با دایره مماس می‌باشد.

فعالیت

آیا خط مستقیم $x - y + 1 = 0$ با دایرهٔ $x^2 + y^2 - 5 = 0$ مماس است؟ یا دایره را در دو نقطه قطع می کند؟ و یا این که دایره را هیچ قطع نمی کند؟

معادلهٔ مماس و طول مماس



آیا معادلهٔ خطی را دریافت کرده می‌توانید که در نقطهٔ $P(-3,-2)$ با دایره $x^2+y^2=13$ مماس باشد؟

اگر یک خط مستقیم با دایره‌یی که مرکز آن $C(h,k)$ و در نقطه $P_1(x_1,y_1)$ با دایره مماس باشد، پس میل شعاع مساوی است به: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

چون شعاع در نقطهٔ تماس بر مماس عمود می‌باشد، میل مماس مساوی است به $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$

چون یک نقطهٔ خط مستقیم $P_1(x_1,y_1)$ است و میل آن $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ می‌باشد.

نظر به معادلهٔ خط مستقیم $y-y_1=m(x-x_1)$ داریم که:

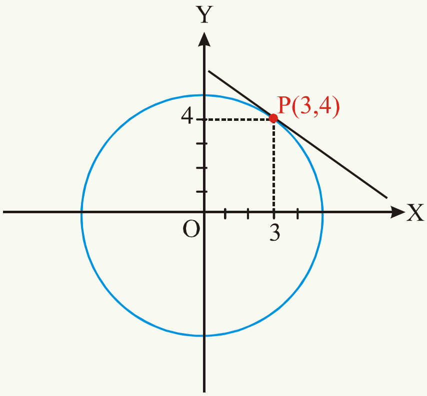
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

این معادله عبارت از معادلهٔ مماس می‌باشد که در نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ با دایره مماس است.
و اگر مرکز دایره در مبدأی کمیات وضعیهٔ واقع باشد در آن صورت $h=k=0$ است و معادلهٔ مماس این شکل را به خود می‌گیرد.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \quad \text{یا} \quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

چون $x_1^2+y_1^2=r^2$ می‌باشد، پس $yy_1+xx_1=r^2$ معادلهٔ مماس می‌باشد.

مثال 1: معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که در نقطه $(3,4)$ با دایره $x^2+y^2=25$ مماس باشد.



حل: چون مرکز دایره در مبدأی کمیات وضعیه واقع می‌باشد. $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

پس معادلهٔ مماس عبارت از $3x+4y=25$

و یا $3x+4y-25=0$ می‌باشد.

مثال 2: معادلهٔ خط مستقیمی‌را دریابید که در نقطه $P(3,5)$ با دایره‌یی که مرکز آن $(1,2)$ است مماس باشد.

$h=1 \qquad k=2$

$x_1=3 \qquad y_1=5$

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$2x+3y=21$$

یا:

$$2x+3y-21=0$$

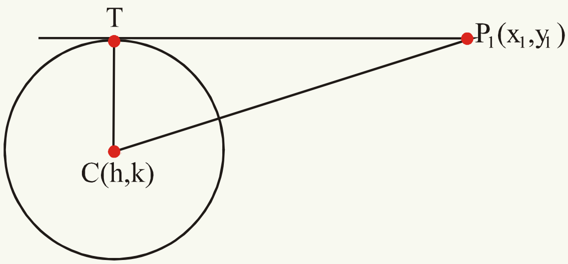
طول مماس

اگر از نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ که در خارج از دایره $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ واقع باشد. مماس P_1T به این دایره مثل شکل رسم شود و نقطهٔ تماس (T) را به مرکز دایره (C) وصل می‌کنیم. در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\square}{P_1TC}$ به اساس قضیهٔ فیثاغورث داریم که:

$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

یا: $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

از طرف دیگر: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ و $\overline{CT} = r$ می‌باشد، پس طول مماس مساوی است به: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



به یاد داشته باشید برای یافتن طول فاصله از یک نقطهٔ خارج دایره به امتداد مماس کفایت می‌کند که قیمت‌های x و y نقطه را در معادلهٔ دایره وضع کنیم.

مثال3: طول مماس را از نقطهٔ $(-5,10)$ بر دایره $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ دریابید.

حل: معادلهٔ را به عدد 5 تقسیم می‌کنیم داریم که: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

طول مماس$= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$

فعالیت

طول مماس را که از نقطهٔ $P(-2,2)$ بر دایرهٔ $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ رسم شده باشد دریابید.

با وضع کردن یک مجهول از معادلهٔ خط مستقیم در معادلهٔ دایره، یک معادلهٔ یک مجهوله درجه دوم به دست می‌آید. اگر در این معادله $\Delta > 0$ باشد خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. اگر $\Delta = 0$ باشد خط مستقیم با دایره مماس و اگر $\Delta < 0$ خط مستقیم دایره را قطع نمی‌کند.

معادلهٔ خط مستقیمی که در نقطهٔ $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ بر دایره‌یی که مرکز آن (h,k) است مماس باشد عبارت است از:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

اگـر مرکز دایره در مبدأی کمیات وضعیه باشـد معادلهٔ مماس $yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ یا $yy_1+xx_1=r^2$ می‌باشد و طول مماس PT از یک نقطه $P(x,y)$ خارج دایره که مرکز دایره (h,k) باشد، مساوی است به:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

تمرین

1- حالات خطوط مســتقیم را با دایره‌هایی که معادله‌های آن‌ها در زیر داده شــده‌اند بررسی کنید.

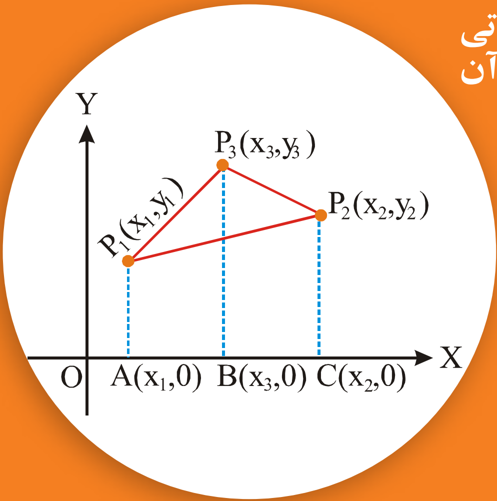
معادله‌های خطوط مستقیم	معادله‌های دایره
$3x-2y+3=0$	$x^2+y^2-4x-y-3=0$
$x-y-1=0$	$2(x^2+y^2)-3x+2y-6=0$
$5x-y=1$	$x^2+y^2-x-9y+14=0$

2- معادلهٔ خط مستقیم را دریابید که در نقطهٔ $(2,-3)$ با دایرهٔ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ مماس باشد.

3- طول مماس راکه از نقطهٔ $(-5,4)$ به دایرهٔ $5x^2+5y^2-10x+15y-131=0$ رسم شده دریابید.

4- طول مماس را که از نقطهٔ $(-2,-5)$ به دایرهٔ $x^2+y^2+8x-5y=7$ ترسـیم شـده باشد دریابید.

دریافت مساحت مثلث در صورتی که کمیات وضعیه رأس‌های آن داده شده باشد.



آیا مساحت مثلثی را می‌توانید دریابید که رأس‌های آن $(-3,6)$، $(3,2)$ و $(6,0)$ باشند؟

اگر P_1، P_2 و P_3 رأس‌های مثلث باشد طوری که در شکل مشاهده می‌شود بالای محور X سه خط عمود $\overline{P_1A}$، $\overline{P_2C}$ و $\overline{P_3B}$ را رسم نمایید.

(مساحت ذوزنقه P_3BCP_2 + مساحت ذوزنقه P_1ABP_3) = مساحت مثلث $P_1P_2P_3$

$-$ مساحت ذوزنقه P_1ACP_2

چون می‌دانیم که مساحت ذوزنقه (نصف مجموع دو ضلع موازی) (فاصله بین دو ضلع موازی) می‌باشد پس:

$$\text{مساحت مثلث } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1$$

$$-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

مثال: اگر $A(4,-5)$، $B(5,-6)$ و $C(3,1)$ رأس‌های یک مثلث باشند مساحت این مثلث

را دریابید.

حل: $x_1=4\quad,\quad y_1=-5\quad,\ x_2=5\quad,\quad y_2=-6\quad x_3=3\quad y_3=1$

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{مساحت مثلث}=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

مساحت یک مثلث $\overset{\square}{P_1\ P_2\ P_3}$ که رأس‌های آن $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ و $P_3(x_3,y_3)$ باشند از فورمول $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ بدست می‌آید.

تمرین

1- مساحت مثلثی را دریابید که رأس‌های آن $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ و $C(12,4)$ باشد.

2- مساحت مثلثی را دریابید که رأس‌های آن $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ و $C(0,3)$ باشد.

3- مساحت چهارضلعی‌یی را دریابید که رأس‌های آن $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ و $D(2,4)$ باشد.

خلاصهٔ فصل

• در مستوی کمیات وضعیهٔ نقاطی که بالای محور X واقع اند مختصهٔ y آن‌ها صفر و نقاطی که بالای محور Y قرار دارند مختصهٔ x آن‌ها صفر می‌باشند.

• فاصله بین دو نقطه $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ از فورمول $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ به دست می‌آید.

• کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p که قطعه خط $\overline{P_1 P_2}$ را به نسبت r تقسیم می‌کند، عبارت اند از: $y = \dfrac{ry_2 + y_1}{1+r}$ □ $x = \dfrac{rx_2 + x_1}{1+r}$ و کمیات وضعیهٔ نقطهٔ وسطی خط $\overline{P_1 P_2}$ عبارت اند از: $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ □ $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ می‌باشد. اگر نقطهٔ p قطعه خط $\overline{P_1 P_2}$ را داخلاً به یک نسبت r تقسیم کند r مثبت و اگر خارجاً تقسیم کند r منفی می‌باشد.

• میل یک خط مستقیم که از دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ می‌گذرد از فورمول $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ به دست می‌آید.

میل محور X و خطوطی که با محور X موازی باشند، صفر و میل محور Y و خطوطی که موازی با محور Y باشند تعریف نشده است. اگر زاویهٔ میل یک خط مستقیم حاده باشد میل آن مثبت و اگر منفرجه باشد میل آن منفی می‌باشد.

• معادلهٔ خط مستقیم که میل و نقطهٔ تقاطع آن با محور y معلوم باشد عبارت از $y = mx + b$ می‌باشد.

معادلهٔ خط مستقیم که میل و یک نقطهٔ آن معلوم باشد $y - y_1 = m(x - x_1)$ است.

معادلهٔ خط مستقیمی که دو نقطهٔ آن معلوم باشد $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ یا $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و معادلهٔ خط مستقیمی که تقاطع آن با محورها معلوم باشد $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ می‌باشد.

• معادلهٔ نورمال یک خط مستقیم عبارت از $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ و معادلهٔ عمومی

یک خط مستقیم عبارت از $ax + by + c = 0$ می‌باشد.

• فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_1, y_1)$ از یک خط مستقیم از فورمول $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ و یا $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

• معادلهٔ دایره‌یی که مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع باشد عبارت از $x^2 + y^2 = r^2$ اگر مرکز آن در مبدأی کمیات وضعیه واقع نباشد و کمیات وضعیه مرکز دایره (h,k) باشد معادلهٔ آن $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ یا $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ و یا $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌باشد.

• با وضع کردن یک مجهول از معادلهٔ خط مستقیم در معادلهٔ دایره، یک معادلهٔ یک مجهوله درجه دوم به دست می‌آید. اگر در این معادله $\Delta > 0$ باشد خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ اگر $\Delta = 0$ باشد خط با دایرهٔ مماس و اگر $\Delta < 0$ خط دایره را قطع نمی‌کند.

• معادلهٔ خط مستقیمی که در نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ بر دایره‌یی که مرکز آن (h,k) است مماس باشد عبارت است از: $y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$

اگر مرکز دایره در مبدأی کمیات وضعیه باشد معادلهٔ مماس $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ یا $yy_1 + xx_1 = r^2$ می‌باشد و طول مماس PT از یک نقطهٔ $P(x_1, y_1)$ خارج دایره که مرکز دایره (h,k) باشد، مساوی است به : $\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$

• مساحت یک مثلث $P_1 P_2 P_3$ که رأس‌های آن $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ و $P_3(x_3, y_3)$ باشند از فورمول $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ به دست می‌آید.

تمرین فصل

1 – فاصله بین هر جوره نقاط داده شدهٔ زیر را دریابید و نیز کمیات وضعیهٔ نقاط تنصیف خط‌هایی را که از این دو نقطه A و B می‌گذرد، دریابید.

$A(3,1)$, $B(-2,-4)$, $A(-8,3)$, $B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})$, $B(-3\sqrt{5},5)$

2 – اگر $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ و $C(h,-2)$ رأس‌های یک مثلث قایم‌الزاویه باشد و $\hat{A}=90°$ باشد قیمت (h) را در یابید.

3 – کمیات وضعیهٔ نقطهٔ p را طوری دریابید که خطی را که از نقاط $A(1,4)$ و $B(5,6)$ می‌گذرد به نسبت $\frac{AP}{PB}=2$ تقسیم کند.

4 – معادلهٔ خط مستقیمی را دریابید که میل آن (-2) و محور Y را در 3 قطع کند.

5 – میل خطوط $x=\sqrt{7}$ و $y=-\sqrt{7}$ را دریابید.

6 – میل محور Y مساوی است به:

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف نشده است

7 – میل یک خط مستقیم $m=\frac{2}{3}$ می‌باشد. میل خطی که عمود بر این خط مستقیم باشد مساوی است به:

$a)\ \frac{2}{3}$ $b)\ -\frac{2}{3}$ $c)\ \frac{3}{2}$ $d)\ \frac{-3}{2}$

8 – میل خطوط مستقیمی را دریابید که از هر جوره نقاط داده شدهٔ زیر می‌گذرد.

$(-2,4)$ و $(5,11)$ $(3,-2)$ و $(2,7)$ $(4,6)$ و $(4,8)$

9 – خطوط مستقیم $4x-y+2=0$ و $12x-3y+1=0$ باهم:

a) موازی اند b) عمود اند c) نه موازی اند و نه عمود

10 – فاصلهٔ بین خط مستقیم $3x-4y+3=0$ و خط مستقیم $3x-4y+7=0$ را دریابید.

11 – معادلـۀ خـط مسـتقیمی را دریابید کـه از نقطۀ $(-4,7)$ می‌گذرد و با خط مسـتقیم $2x-7y+4=0$ موازی باشد.

12 – فاصلۀ نقطۀ $P(6,-1)$ از خط مستقیم $6x-4y+9=0$ را دریابید.

13 –کمیات وضعیۀ نقطۀ p را دریابید که خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را که از نقاط $P_1\,(2,-5)$ و $P_2\,(6,3)$ می‌گذرد داخلاً به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم کند.

14 – معادله‌های خطوط مستقیم زیر را به شکل نورمال آن تبدیل کنید.

$2x+5y-2=0$ $\qquad 2x-3y+6=0$

15 – میل خط مستقیمی که از نقاط $(4,0)$ و $(-4,0)$ می‌گذرد مساوی است به:

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف نشده

16 – معادلۀ خط مسـتقیمی را دریابید که طول نورمال آن 10 واحد بوده و نورمال با جهت مثبت محور X زاویه $30°$ را بسازد.

17 – مسـاحت مثلثـی را دریابیـد که رأس‌هـای مثلث $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ و $C(4,-5)$ باشند.

18 – مسـاحت مثلثی که رأس‌های آن $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ و $C(3,-10)$ باشـند مساوی است به:

a) 1 b) 2 c) 0 d) هیچکدام

19 – کمیات وضعیۀ نقاط تقاطع خط مستقیم $x+2y=6$ با دایره $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ را دریابید.

20 – معادلۀ دایره‌یی را بنویسید که از نقاط $A(1,1)$, $B(2,-1)$ و $C(3,-2)$ می‌گذرد.

21 – معادله دایره یی را بنویسـید که از نقاط $A(3,-1)$ ، $B(0,1)$ می‌گذرد و مرکز آن به روی خط $4x-3y-3=0$ واقع باشد.

22 – کمیـات وضعیـۀ مرکـز و طـول شـعاع دایره‌یـی را دریابیـد کـه معادلـۀ آن $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ باشد.

23- معادلهٔ دایره‌یی را دریابید که از نقاط $A(4,1)$ و $B(6,5)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $4x+y-16=0$ واقع باشد.

24 - اگر رأس‌های یک مثلث $A(5,-6)$، $B(-3,5)$ و $C(-1,2)$ باشند این مثلث:

a) متساوی الاضلاع می‌باشد b) متساوی‌الساقین می‌باشد c) مختلف الاضلاع می‌باشد

25- اگر مختصات رأس‌های یک مثلث به ترتیب $(5,4)$، $(4,10)$ و $(7,8)$ باشد این مثلث:

a) متساوی الاضلاع می‌باشد b) متساوی‌الساقین می‌باشد c) مختلف الاضلاع می‌باشد

26- اگر $P(-8,4)$ و $Q(2,-1)$ باشد، مختصات نقطه A را دریابید که اگر نقطهٔ A خط PQ را داخلاً و خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کند.

27- نقاط تقاطع خط مستقیم $x-y+1=0$ با دایره‌یی $x^2+y^2=5$ را دریابید.

28- اگر خط مستقیم $x+ay-5=0$ بر دایره $x^2+y^2-2x+4y=0$ مماس باشد قیمت a را دریابید.

29- معادلهٔ دایره‌یی را که از نقاط $(0,0)$ و $(2,0)$ می‌گذرد و با خط $y-1=0$ مماس باشد عبارت است از:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30- دایره‌یی که معادلهٔ آن $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ باشد.

a) حقیقی است b) نقطوی است c) موهومی است

31- دایره‌یی که معادلهٔ آن $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ باشد.

a) موهومی است b) نقطوی است c) حقیقی است

32- فاصلهٔ بین نقاط $A(4,-3)$ و $B(-2,-5)$ و نیز کمیات وضعیهٔ نقطه تنصیف خط مستقیم $\overline{AB}$ را دریابید.

33- اگر رأس‌های یک مثلث $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ و $C(-1,5)$ باشد نشان دهید که این مثلث قایم‌الزاویه می باشد.

34- نشان دهید که $A(0,0)$ ، $B(a,0)$، $C(0,b)$ و $D(a,b)$ رأس‌های یک مستطیل اند و نیز نشان دهید که طول قطرهای مستطیل باهم مساوی می‌باشند.

35 – نشـــان دهیـــد که نقاط $A(3,1)$، $B(6,2)$ و $C(9,3)$ روی یک خط مســـتقیم واقع اند.

36 – معادله‌های خطوط مستقیمی را دریابید که از هر جوره نقاط داده شده زیر می‌گذرد:

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 – معادلهٔ خط مستقیم که از نقاط (5,8) و (−1,10) می‌گذرد عبارت است از:

$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$

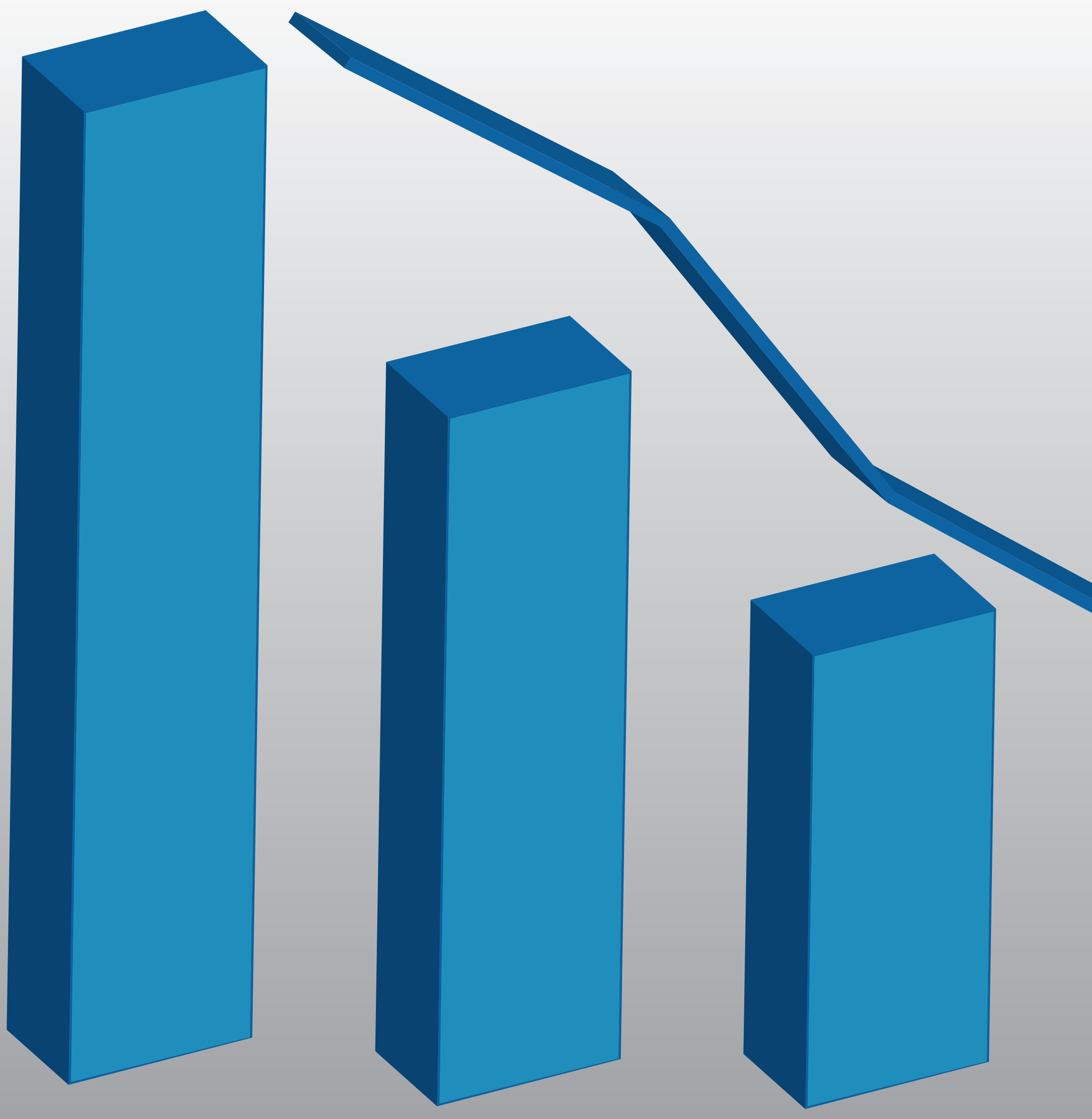
$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$

$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

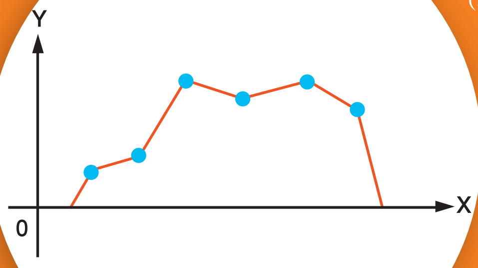
d: هر سه درست اند

فصل هشتم

احصاییه



گراف چند ضلعی کثرت
(Frequency Polygon graph)



شکل مقابل را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید مساحت زیر منحنی داده شده را محاسبه کنید؟

آیا گفته می‌توانید که مساحت زیر این منحنی مساوی به چیست؟

فعالیت

جدول کثرت زیر را در نظر بگیرید:

دسته‌ها	مرکز دسته‌ها x_i	کثرت f_i
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- مرکز هر دسته را به عنوان مختصهٔ اول و کثرت مربوطهٔ آن را به عنوان مختصهٔ دوم در نظر گرفته به صورت جوره‌های مرتب بنویسید.
- موقعیت این جوره‌های مرتب را در یک سیستم کمیات وضعیهٔ قایم مشخص کنید.
- نقاطی که از این جوره‌های مرتب در مستوی حاصل می‌شود با هم وصل کنید.

آیا می‌توانید مساحت زیر این گراف را محاسبه کنید؟

- به دو سر گراف نقاط (8.5,0) و (38.5,0) را روی محور x علاوه نمایید، گراف حاصل شده را با گراف مستطیلی جدول کثرت داده شده یک‌جا رسم کنید و مساحت مستطیل‌ها را به مساحت زیر منحنی مقایسه نمایید.

در گراف چند ضلعی، مرکز هر دسته روی محور افقی و کثرت مطلق یا کثرت نسبی هر یک از دسته‌ها روی محور عمودی نشان داده می‌شود. در مقابل با مرکز هر دسته و کثرت آن یک نقطه در مستوی مشخص می‌گردد که عرض آن مرکز دسته و طول آن برابر با کثرت آن دسته است. به تعداد دسته‌های جدول در مستوی سیستم مختصات نقطه به وجود می‌آید. اگر به نقاط مذکور دو نقطهٔ اختیاری دیگر $(x_1 - c\ ,\ 0)$ و $(x_n + c\ ,\ 0)$ را در اول و آخر دسته‌ها اضافه کنیم، طوری‌که c وسعت هر صنف (سرحد بالای منفی سرحد پایینی صنف) است از اتصال این نقاط به یک‌دیگر، یک گراف حاصل می‌شود که آن را گراف چند ضلعی کثرت می‌نامند.

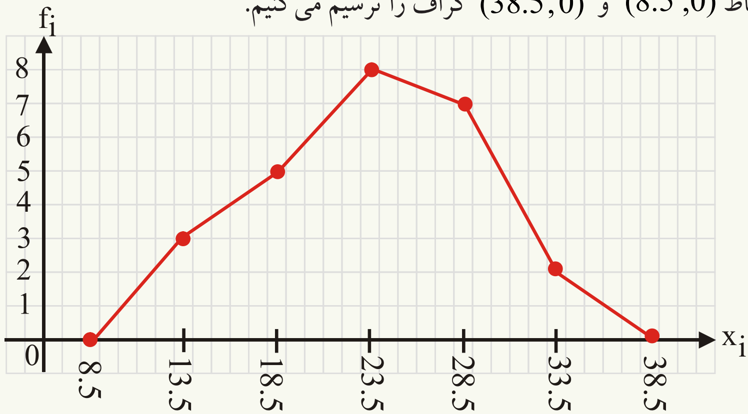
مثال: گراف‌های مستطیلی (هستوگرام) و چند ضلعی دیتای (Data)جدول زیر را رسم کنید.

حدود دسته‌ها = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
کثرت مطلق = f_i	3	5	8	7	2
مرکز دسته‌ها = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

چون می‌دانیم که وسعت دسته‌ها $c = 5$ است، بنابراین برای به دست آوردن نقاط اختیاری داریم:

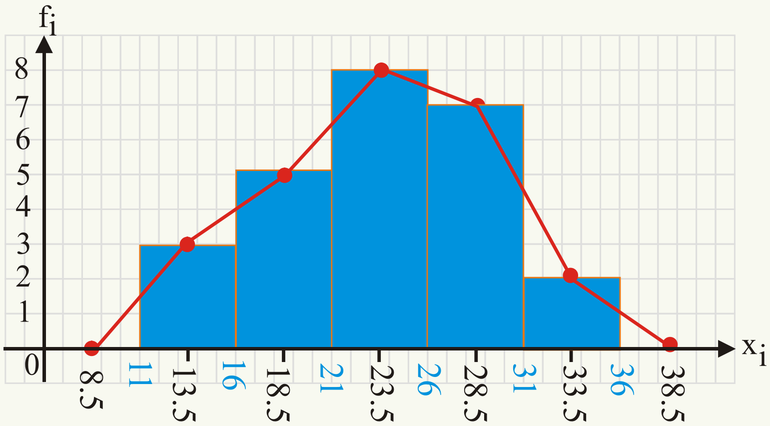
$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$
$$(x_n + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

با علاوه نمودن نقاط $(8.5\ ,0)$ و $(38.5, 0)$ گراف را ترسیم می‌کنیم.



گراف چند ضلعی کثرت

نمایش گراف مستطیلی و چند ضلعی کثرت با هم:



از گراف بالا دیده می‌شود که:

– هر یک از رأس‌های گراف چند ضلعی کثرت در نقاط مابینی ضلع بالایی یک مستطیل مربوط به جدول کثرت مورد مطالعه قرار دارد.

– مساحت سطح زیر گراف چند ضلعی کثرت و مساحت گراف مستطیلی با هم برابر است.

– گراف چند ضلعی کثرت نسبی بیش‌تر برای دیتا (data) پیوسته یا متصل به کار می‌رود.

تمرین

اندازهٔ قد 24 نفر شاگرد صنف نهم و دهم (برحسب سانتی متر)قرار زیر داده شده است:

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

برای دیتای (data) فوق یک جدول کثرت تنظیم نموده، دیتا(data) را در شش دسته، دسته‌بندی کنید. برای نمایش این دیتا (data)چه نوع گراف مناسب است؟ گراف چند ضلعی کثرت را رسم کنید.

گراف ساقه و برگ



ما در دنیای از اعداد زنده‌گی می‌کنیم، هرشخص به عنوان عضوی ازجامعهٔ کشور خود، یک شمارهٔ مخصوصی به خود دارد که به اندازهٔ دیگرمشخصاتش مهم است؛ آیا گفته می‌توانید آن شماره چیست؟ آیا شما هم شمارهٔ خود را می دانید؟

فعالیت

- اندازهٔ قد 20 نوزاد که به طور تصادفی (برحسب سانتی متر) انتخاب گردیده در جدول زیر داده شده است:

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- دیتای (data)بالا را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

– دیده می‌شود که در تمام این اعداد رقم 4 مشترک است، می‌توان این ارقام را به صورت زیر نوشت:

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- ارقام 0 الی 9 هر یک چند مرتبه تکرار شده است؟

– ارقام بالا را به شکل زیر می‌نویسیم:

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

• اگر شکل اعداد بالا را به زاویهٔ 90 درجه به طرف چپ دوران دهید، این شکل مشابه به کدام نوع گراف است؟

دیتا(data) به طور معمول به صورت اعداد می‌باشد، از این اعداد طوری که در فعالیت بالا مشاهده گردید می‌توان گرافی را تشکیل داد که این گراف را به نام گراف ساقه و برگ یاد می کنند. اگر این گراف را به زاویهٔ 90° به طرف چپ دوران دهیم گراف میله یی تشکیل می گردد. به طور نمونه اگر دیتا (data) بین صفر الی 100 قرار داشته باشند، می‌توان مقدار مانند 37 را به ساقهٔ 3 و برگ 7 تقسیم کرد.

گراف ساقه و برگ برای دیتا (data) که تفاوت کوچکترین وبزرگترین دیتا (data) از نظر تعداد رقم‌ها اندک باشد، مناسب است.

مثال 1: در یک کتاب‌فروشی از 20 نوع کتاب که تعداد هر کدام در جدول زیر تذکر داده شده است موجود است، گراف ساقه و برگ را برای این دیتا (data) ترسیم کنید.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: واضح است که ارقام اول طرف چپ دیتا (Data) اعداد 5،4،3،2،1 و 6 هستند که این مقادیر را برای ساقه در نظر می‌گیریم، اما دیتای مربوط به هر شاخه را در جلو آن می‌نویسیم که گراف به صورت زیر حاصل می‌شود:

ساقه	برگ
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

اگر صفحهٔ کتاب را به اندازهٔ 90° (خلاف حرکت عقربهٔ ساعت) دوران دهیم گراف به شکل گراف میله‌یی تبدیل می‌شود که می‌توان به صورت زیر نوشت:

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

مثال2: در یک امتحان ریاضی نتایج زیر از شاگردان یک صنف به دست آمده است، گراف ساقه و برگ را برای این دیتا ترسیم نمایید.

25	45	46	50	50	50	55	55	55	55
55	57	58	58	60	60	62	65	67	72

حل: در اینجا برای تشکیل ساقه‌ها از رقم ده‌ها و برای تشکیل برگ‌ها از رقم یک‌ها استفاده می کنیم:

ساقه	برگ									
2	5									
3										
4	5	6								
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7					
7	2									

تمرین

1 - برای دیتای (Data) زیر گراف ساقه و برگ را رسم کنید.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

توجه: به خاطر نمایش گراف ساقه و برگ عدد 8.3 را به صورت 083 عدد 11.2 را به صورت 112 و 12 عدد را به صورت 120 می‌نویسیم.

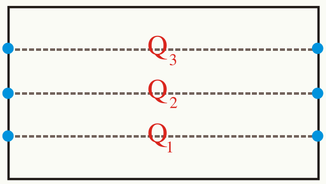
چارک‌ها



در شکل مقابل اگر این جامعه از مردم را نظر به طول قدشان به چهار حصهٔ مساوی تقسیم نمایید هر حصهٔ آن نماینده‌گی از چه می کند؟

فعالیت

شکل مقابل مستطیلی است که توسط خطوط Q_1، Q_2 و Q_3 به چهارحصهٔ مساوی تقسیم شده است.



- چند فی‌صد از مساحت مستطیل زیر خط Q_1 و چند فی‌صد مساحت آن بالای خط Q_1 قرار دارد؟
- چند فی‌صد از مساحت مستطیل زیر خط Q_2 و چند فی‌صد بالای خط Q_2 قرار دارد؟
- چند فی‌صد مساحت مستطیل زیر خط Q_3 و چند فی‌صد بالای خط Q_3 قرار دارد؟

اعدادی که دیتای (data)مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند آن‌ها را چارک‌های اول، دوم و سوم می‌نامند و با Q_1, Q_2 و Q_3 نشان می‌دهند.

چارک اول، مقداری است که 25% دیتای (data)جامعه پایین تر ازآن و 75% بالاتر از آن قرار می گیرند.

چارک دوم، مقداری است که 50% دیتای (data)جامعه پایین‌تر از آن و 50% دیتا (data) بالاتر از آن قرار می گیرند.

چارک سوم، مقداری است که 75% دیتای (data) جامعه پایین‌تر از آن و 25% دیتا (data) بالاتر از آن واقع می شوند.

اگر دیتا (data) را به صورت صعودی مرتب کنیم میانهٔ دیتا (data) مساوی به Q_2 و میانهٔ نیمهٔ اول دیتا (data) مساوی به Q_1 و میانهٔ نیمهٔ دوم دیتا (data) مساوی به Q_3 است.

در وقت محاسبهٔ چارک‌ها، مراحل زیر را در نظر بگیرید:

- دیتا(data) را به طور صعودی مرتب کنید.
- دیتای مرتب شده را از 1 تا n شماره‌گذاری کنید.
- محل P ام ($P=1,2,3$) را با استفاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C_{QP}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

- با استفاده از محل چارک، مقدار چارک را تعیین نمایید.

مثال: فرض کنید دیتای (data) یا مشاهدات به دست آمده قرار زیر داده شده است:

90 85 80 120 100 140

– محل چارک اول وسوم را محاسبه کنید.

– مقادیر چارک اول و سوم را به دست آورید.

شمارهٔ دیتا:	6	5	4	3	2	1
دیتا:	140	120	100	90	85	80

محل چارک اول و سوم عبارت است از:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=2$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=5$$

مقدار چارک‌های اول و سوم عبارت اند از:

$Q_3=120$ $Q_1=85$

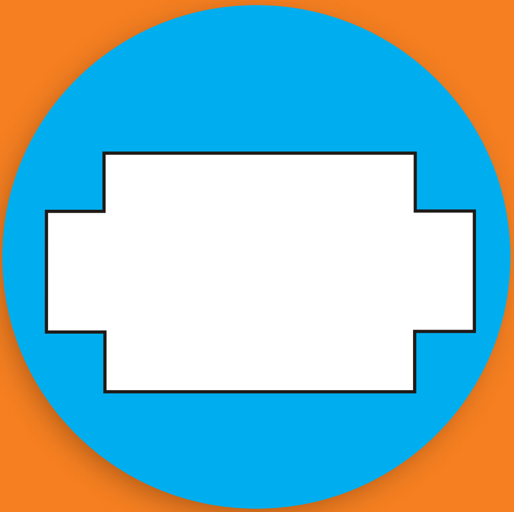
تمرین

فرض کنید دیتای (data) به دست آمده قرار زیر داده شده باشند:

100 90 80 120 160 140 85

- چارک اول و سوم را به دست آورید.
- اعداد، قبل از میانه را بنویسید.
- اعداد بعد از میانه را به دست آورید.

گراف صندوقچه‌یی



از چهار کنج یک تخته کاغذ، چهار مربع کوچک که هر ضلع آن 5 سانتی متر طول دارد جدا کنید و این بریده گی‌ها را به طرف بالا قات کنید، شکلی که به دست می‌آید مشابه به چیست؟

فعالیت

تعداد مریضانی که در یک شفاخانه در طی 17 روز مراجعه نموده‌اند، قرار زیر ثبت شده اند:

24 17 16 27 14 23 15 10 11

19 26 25 18 31 31 13 28

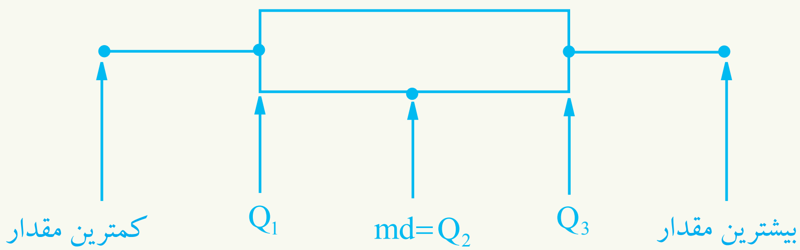
- میانه را پیدا کنید.
- اعدادی که در نیمهٔ قبل از میانه قرار دارند را بنویسید.
- برای این اعداد میانه را پیدا کنید.
- اعدادی که در نیمهٔ بعد از میانه قرار دارند را بنویسید.
- برای این اعداد میانه را دریافت کنید.
- چارک دوم یا Q_2 به کدام عدد مطابقت می کند؟

گراف صندوقچه‌یی (گراف جعبه‌یی): گراف تصویری است که پراکنده‌گی دیتا (Data) را نسبت به گراف‌های دیگر بهتر نشان می‌دهد. این گراف، دیتای (Data) را بر اساس مقادیر زیر نمایش می‌دهند.

الف) کم‌ترین دیتا ب) چارک اول

ج) میانه د) چارک سوم هـ) بیش‌ترین دیتا

گراف صندوقچه‌یی نشان دهندهٔ چارک‌ها، حداقل و حداکثر دیتا است.



مراحل تهیهٔ گراف صندوقچه‌یی را می‌توان به طور زیر شرح داد:

الف) کوچک‌ترین دیتا (Data) را پیدا کنید. ب) بیشترین دیتا (Data) را پیدا کنید.

ج) میانه را پیدا کنید. د) چارک اول را دریافت کنید.

هـ) چارک سوم را پیدا کنید و) گراف را رسم کنید.

مثال: اگر تعداد تصادفات ترافیکی یک شهر طی 15 روز قرار زیر داده شده باشد، گراف صندوقچه‌یی آن را رسم کنید.

12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: دیتای (Data) فوق را مرتب می‌کنیم.

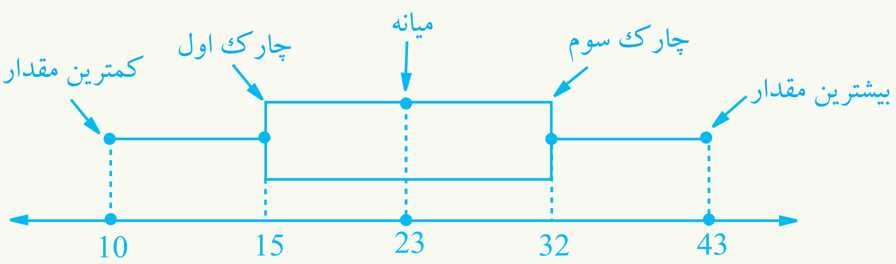
10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

بنابر این:

کم‌ترین دیتا = 10 بیشترین دیتا= 43

میانه = 23 چارک اول = $Q_1 = 15$

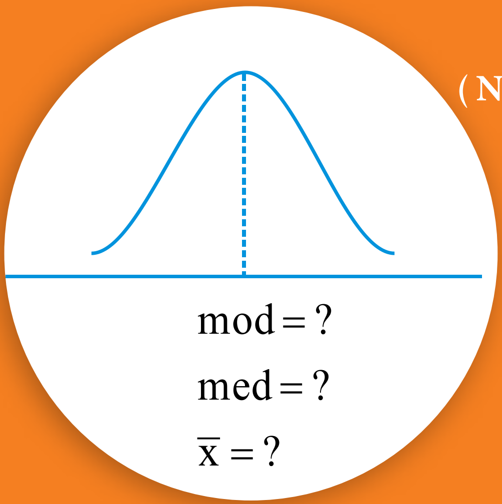
چارک سوم = $Q_3 = 32$



گراف بالا گراف صندوقچه‌یی است که 50% دیتا (Data) در داخل صندوق (بین چارک اول و سوم) قرار دارد. 25% دیتا (Data) در بین 10 الی 15 و 25% دیتا (Data) بین 32 الی 43 قرار دارند.

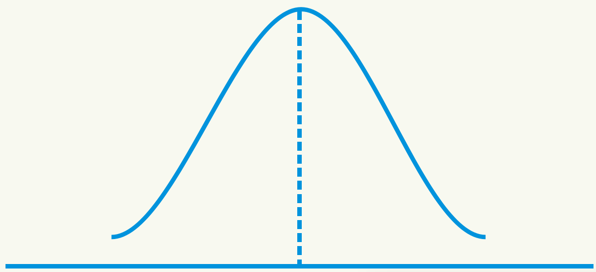
مقایسهٔ شاخص‌های مرکزی
توسط منحنی نارمل (Normal)

آیا می‌توان توسط منحنی نارمل
شاخص‌های مرکزی را به دست بیاوریم؟



منحنی‌یی که در زیر مشاهده می‌کنید از جمله منحنی‌های معروف در احصاییه است که اکثر پدیده‌های طبیعی را می‌توان توسط آن نمایش داد، این منحنی یک منحنی متناظر و مشابه به یک زنگ می‌باشد.

آیا موقعیت شاخص‌های مرکزی (اوسط، میانه و مود) را در این منحنی می‌توانید مشخص کنید؟

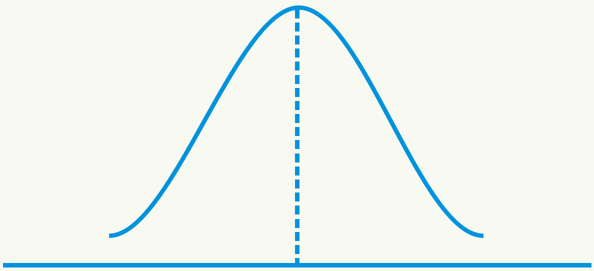


فعالیت

– اگر در یک صنف تمامی شاگردان نمرات خوبی بگیرند:
- آیا فکر می‌کنید که اوسط نمرات آن‌ها هم خوب است؟
- آیا بالا بودن اوسط نمرات نشان دهندهٔ وضع خوب صنف است؟

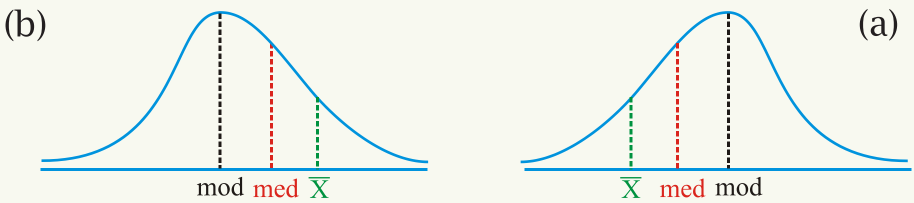
– برای آن که وضع صنف را بتوانیم خوب ارزیابی کنیم باید نصف صنف نمرهٔ خوب اخذ نماید.
- آن نمره، چه نمره‌یی است که نمرهٔ نصف شاگردان صنف از آن بیش‌تر است؟
- اگر میانه خیلی از اوسط کوچک‌تر باشد تعبیر آن چیست؟
- اگر میانه، خیلی بزرگتر از اوسط باشد، تعبیر آن چیست؟

از مفاهیم فعالیت بالا و متناظر بودن منحنی نارمل نتیجه می‌شود که موقعیت میانه و اوسط در منحنی نارمل یک‌سان می‌باشد و چون منحنی نارمل نقطهٔ اعظمی دارد، بنابراین موقعیت مود آن نیز، برابر اوسط و میانه است، یعنی:



$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

اگر منحنی نارمل متناظر نباشد در این صورت داریم که:

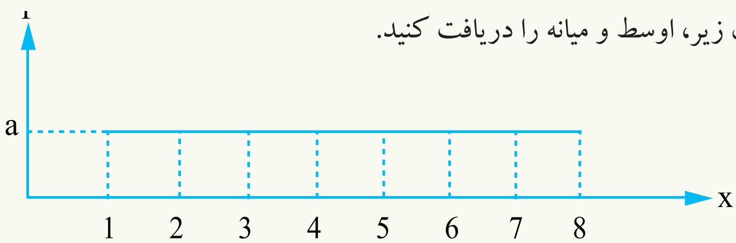


$$\text{mod} < med < \bar{x} \qquad \bar{x} < med < \text{mod}$$

– اگر اوسط و میانه مساوی باشند، تعداد دیتایی (Data) که قبل و بعد از اوسط و میانه قرار دارند، مساوی می‌باشند.

اگر اوسط در سمت چپ میانه واقع باشد، تعداد دیتایی (Data) که در سمت راست اوسط قرار دارند بیشتر از تعداد دیتایی (Data) اند که در سمت چپ اوسط قرار دارند؛ مانند شکل (a). اگر اوسط در سمت راست میانه واقع باشد، تعداد دیتایی (Data) که در سمت راست اوسط قرار دارند؛ کمتر از تعداد دیتایی (Data) اند که در سمت چپ اوسط قرار گرفته‌اند. مانند شکل (b)

مثال: در گراف زیر، اوسط و میانه را دریافت کنید.



حل

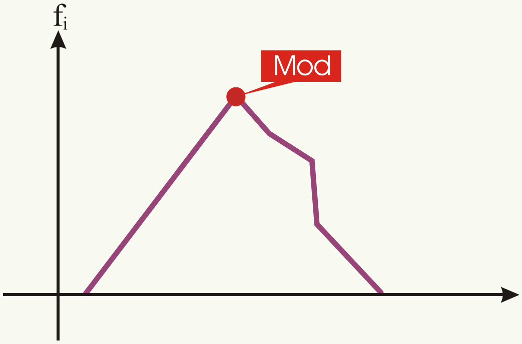
$$\text{میانه} = med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\text{اوسط} = \bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

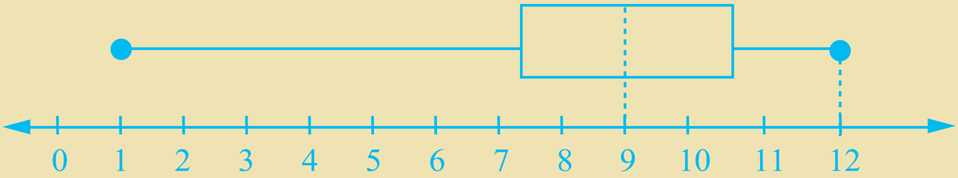
مثال: در گراف زیر، محل تقریبی مود را، بدون محاسبه مشخص نمایید:

حل



تمرین

1 - با توجه به گراف صندوقچه‌یی، سؤال‌های زیر را جواب دهید:



- در گراف بالا، میانه چند است؟
- چارک اول در این دیتا (Data) عدد 8 است، این عدد نشان دهندهٔ چیست؟
- ربع سوم (چارک سوم) چند است؟ این عدد نشان دهندهٔ چیست؟
- موجودیت میانه در سمت چپ صندوق، نشان دهندهٔ چیست؟
- بلندتر بودن ترادف سمت چپ نسبت به ترادف سمت راست نشان دهندهٔ چیست؟

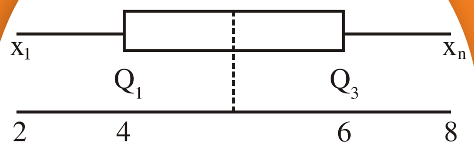
2 - سن بازی‌کنان تیم ملی فوتبال یک کشور، به شرح زیر است:

26	25	22	23	18	31	19	26	24	25
	26	31	33	25	25	29	23	27	25

کدام نتیجه‌گیری زیر، درست است؟

- تعداد بازی‌کنانی که سن آن‌ها بالاتر از اوسط است بیش‌تر است.
- تعداد بازی‌کنانی که سن آن‌ها بالاتر از میانه است بیش‌تر است.
- تعداد بازی‌کنانی که سن آن‌ها کم تر از اوسط است بیش‌تر است.
- تعداد بازی‌کنانی که سن آن‌ها بیشتر از اوسط است با تعداد بازی‌کنانی که سن آن‌ها کم‌تر از اوسط است برابر است.

انحراف چارک‌ها



اگر دامنهٔ تغییرات احصاییوی یک جامعه بزرگ باشد، آیا فکر می کنید که ساحهٔ تحول دیتا (Data) می‌تواند تعبیر نامناسب از جامعه را ارائه کند؟

فعالیت

تعداد بازدیدکننده‌گان از یک موزیم در 12 روز کاری قرار آتی است:

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ساحهٔ تحول این دیتا (Data) را دریافت کنید.
- دیتایی (Data) بالا در حالت عموم بین کدام دو عدد پراکنده شده است؟
- یک چهارم حصهٔ دیتا (Data) را از بالا و پایین حذف کنید و بعد ساحهٔ تحول دیتایی (Data)باقیمانده را دریافت کنید.
- این دو ساحهٔ تحول به دست آمده را باهم مقایسه نمایید، کدام‌یک پراکنده‌گی بیشتر را نشان می‌دهد؟
- ساحهٔ تحول در بعضی مواقع به علت موجودیت دو مقدار خیلی کوچک و خیلی بزرگ در جامعه ممکن است. تعبیرهای نامناسب از جامعه را ارائه کند، بنابراین در این مواقع از شاخص دیگری به نام انحراف چارک‌ها که بتواند ساحهٔ تحول جامعه را بهتر مشخص نماید استفاده می‌نماییم.
- اگر Q_1 و Q_3 به ترتیب چارک اول و سوم مجموعه‌یی از دیتا (Data) باشند انحراف چارک‌ها را به (Q) نمایش داده و قرار زیر تعریف می کنند:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

انحراف چارک‌ها، یکی از شاخص‌های نشان دهندهٔ پراکنده‌گی دیتا (Data)است، زیرا از روی تعریف چارک اول و سوم بر می‌آید که 50% جامعه در فاصلهٔ $Q_3 - Q_1$ قرار دارند. هر قدر این فاصله کوچک‌تر باشد، دیتا (Data) جمع‌تر و به عبارت دیگر، پراکنده‌گی

آن‌ها کمتر است.

گاهی انحراف چارک‌ها را به صورت:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

نیز تعریف می‌کنند و آن را نیم‌دامنه چارک می‌نامند.

مثال: انحراف چارک‌های اعداد زیر را به دست آورید:

35 29 30 31 25 24 23 22 22 20 36

حل: نخست اعداد را به طور صعودی ترتیب می‌کنیم و شماره‌گذاری می‌نماییم:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

پس از این‌جا: $Q_3 = 30.75$

هم‌چنان $C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$

پس از این‌جا: $Q_1 = 22.25$

بنابرآن، چارک‌های اول و سوم به ترتیب عبارت اند از: 22.25 و 30.75؛ پس:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

تمرین

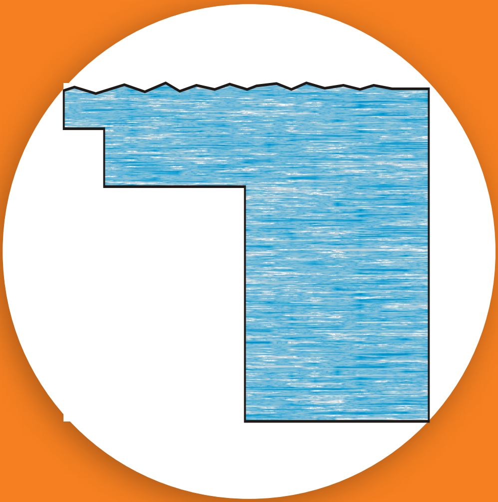
1- ساحهٔ تحول، انحراف چارک‌ها و مود دیتای (Data) زیر را تعیین کنید و بگویید که تراکم دیتا (Data) در کدام ساحه زیادتر است؟

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2- ساحهٔ تحول وانحراف چارک‌های، دیتای زیر را دریافت نموده وسپس با ساحهٔ تحول و انحراف ربعی سؤال اول مقایسه کنید.

27 24 21 29 28 26 23 22

واریانس (Variance)



اگر شما شنا را خوب بلد نباشید و بخواهید در یک حوضی که عمق آن در بسیاری نقاط آن یکسان نیست آب‌بازی نمایید. برای این‌که اطمینان حاصل کنید در وقت شنا در خطر نخواهید بود چه اطلاعاتی را لازم دارید؟

فعالیت

اگر در یک حوض آب‌بازی، یک ساحه آن 1.5 متر و ساحه دیگر آن 2.5 متر عمق داشته باشد:

- اوسط عمق این دو ساحه حوض را دریافت کنید.
- مربع‌های انحراف‌های دو دیتا را از اوسط حسابی تعیین کنید.
- مجموع مربع‌های انحراف‌های دو دیتا را به دست آورید.
- مجموع دیتای (Data) فوق را بر تعداد اعضای مجموعه آن تقسیم کنید.

برای محاسبه واریانس دیتای (Data) $x_1, x_2, \dots, x_n$ مراحل زیر را درنظر بگیرید:

– اوسط دیتا (Data) را دریافت کنید، یعنی:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

– مجموع مربع‌های انحراف‌ها، یعنی:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \quad \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

را به دست آرید.

– مجموع فوق را بر تعداد اعضای مجموعه، n تقسیم نموده و مساوی به S^2 نشان می‌دهیم؛ یعنی:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\dots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

در این‌جا S^2 را به نام واریانس یاد می‌کنند. واریانس عبارت از اوسط جذر مربع انحراف‌ها از اوسط است.

توجه: برخی اوقات برای محاسبه واریانس از فرمول زیر نیز استفاده می‌نمایند.

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\overline{x}^2$$

ثبوت: فرمول فوق را می‌توان قرار زیر به دست آورد.
چون می‌دانیم که:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}2x_i\overline{x}}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^{2}}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\frac{n\overline{x}^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\overline{x}^2$$

مثال: واریانس دیتای (data) زیر را با استفاده از هر دو فرمول حساب کنید.

1 5 6 7 9

الف) از فرمول

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(xi-\overline{x})^2}{5}$$

$$\overline{x}=\frac{1+5+6+7+9}{5}=5.6$$

$$S^2=\frac{(1-5.6)^2+(5-5.6)^2+(6-5.6)^2+(7-5.6)^2+(9-5.6)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب) از فرمول

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$$

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5 \cdot 6)^2 = 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادداشت: اگر دیتای (data) دسته‌بندی شده با مرکز دسته‌های $x_1, x_2, .., x_n$ و با کثرت‌های $f_1, f_2, \ldots, f_n$ داده شده باشند، برای محاسبه واریانس بهتر است از فرمول زیر استفاده شود:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

طوری که $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

توجه: تعیین واحد واریانس مشکل است، طبق معمول کمیت مطلق (ثابت) آن را مورد عمل قرار می‌دهند؛ اما بعضی اوقات واحد واریانس را از نوع مربع واحد متحول آن حساب می‌کنند.

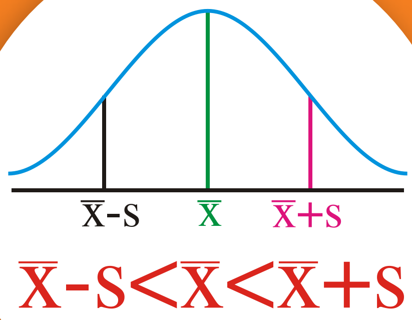
تمرین

تعداد ساعاتی را که شاگردان در طول یک هفته به ورزش اختصاص داده اند، در زیر آمده است:

2 2 3 4 1 2 3

واریانس این دیتا (data) را حساب کنید.

انحراف معیاری



اگر S جذر واریانس و $\bar{x}$ اوسط دیتا باشند شکل مقابل توضیح چه نوع شاخص را بیان می‌کند؟

فعالیت

اگر S^2 واریانس دیتای (Data) $x_1, x_2, ..., x_n$ باشد، فکر می‌کنید که آیا واحد S^2 و S باهم تفاوت دارند؟

فرض کنید زمان تسلیم‌دهی کالاهایی که در یک هفتهٔ خاص به یک کارخانه فرمایش داده شده با شاخص‌هایی؛ مانند: انحراف، قیمت مطلق انحراف و مربع انحراف‌ها در جدول زیر داده شده است، طوری که:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

زمان تحویل به روز x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	قیمت مطلق انحراف $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	مربع انحراف‌ها $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

• اوسط زمان تحویل دیتای (Data)(فرمایشات) را دریافت کنید.
• اوسط قیمت مطلق انحراف‌ها و یا به طور خلاصه انحراف اوسط(AD) را حساب کنید.
• واریانس زمان تحویل کالاها را به دست آورید.
• جذر مربع واریانس را محاسبه کنید.
• واحد جذر واریانس را با واحد واریانس مقایسه کنید.

از فرمول واریانس آموختید که عمل توان‌رسانی نه تنها مقیاس اندازه‌گیری واریانس را شامل اشکالات می‌کند، بلکه انحراف‌ها را نیز بزرگ نشان می‌دهد.

برای این که بتوانیم این سوی تفاهم را از بین ببریم، لازم است تا جذر مربع واریانس را به دست آوریم و این جذر واریانس شاخص پراکنده‌گی دیگری را به نام انحراف معیاری یا پراکنده‌گی مطلق معرفی می‌نماید.

انحراف معیاری که با سمبول s نشان داده می‌شود، برابر به جذر مربع واریانس است؛ یعنی:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

واحد انحراف معیاری یا پراکنده‌گی مطلق همان واحد متحول است.
رابطهٔ اخیر را می‌توان طور ذیل ثبوت نمود:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-2n\bar{x}^{\,2}+n\bar{x}^{\,2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\bar{x}^{\,2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

مثال: درجهٔ حرارت بدن 5 مریض در زیر داده شده است:

38 39 39 40 41

انحراف معیاری آن را حساب کنید.

حل

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

توجه: انحراف معیاری در یک جدول کثرت، به صورت تقریبی از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$\sqrt{S = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - (\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2}$$

در اینجا $\bar{x}$ اوسط دیتا (data)، x_i مرکز دسته‌ها و f_i کثرت دسته‌هاست.

تمرین

تعداد ساعت‌هایی را که چهار دستگاه تلویزیون دربارهٔ معارف برنامه پخش می‌کنند، در زیر داده شده است. انحراف معیاری دیتا (Data) را حساب کنید.

1 3 4 5

• **گراف چندضلعی کثرت:** جوره‌های مرتب نقاطی را که عرض آن‌ها، مرکز دسته‌ها و طول آن‌ها برابر کثرت همان دسته باشد با هم وصل می‌کنیم گراف چند ضلعی کثرت به وجود می‌آید، در گراف چند ضلعی کثرت دو نقطه با کثرت صفر به ابتدا و انتهای دسته‌ها اضافه می‌شود تا گراف چند ضلعی کثرت به محور x متصل شود.

• **گراف ساقه و برگ:** برای رسم گراف ساقه و برگ از اعدادی استفاده می‌شود دیتای (Data) احصاییوی را به صورت اعداد در آورده و سپس از این اعداد گراف ساقه و برگ را تشکیل می‌دهیم. این گراف برای دیتای (Data) که تفاوت کوچکترین و بزرگترین دیتا از نظر تعداد رقم‌ها اندک باشد، مناسب است.

• **چارک:** عددی که جامعهٔ مرتب را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، میانه نامیده می‌شود. حال اعدادی را در نظر بگیرید که جامعهٔ مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. این اعداد را با Q_1، Q_2 و Q_3 نشان می‌دهند و آن‌ها را به ترتیب چارک‌های اول تا سوم می‌نامند. واضح است که Q_2 میانه است.

• **گراف صندوقچه‌یی یا گراف جعبه‌یی:** از این گراف برای دیتای (Data) که به هم نزدیک هستند دیتای (Data) که در اطراف اوسط متمرکز اند و یا در اطراف بیش‌ترین دیتا و یا کمترین دیتا متمرکز اند استفاده می‌شود. این گراف یک گراف تصویری است که دیتا (Data) را بر اساس کمترین دیتا، بیشترین دیتا، میانه، چارک اول و چارک سوم نمایش می‌دهند.

• **مقایسهٔ شاخص‌های مرکزی توسط منحنی نارمل:** وقتی که می‌خواهیم شاخص‌های مرکزی (اوسط، میانه و مود) را با استفاده ازمنحنی‌یی نارمل مقایسه نماییم در این‌صورت، اگر منحنی نارمل متناظر باشد، اوسط، میانه و مود با هم برابرند، اگر منحنی نارمل متناظر نباشد شاخص‌های مرکزی قیمت‌ها را نظر به موقعیتی که به طرف سمت چپ و راست منحنی دارند اختیار می‌کنند.

• **انحراف چارک‌ها:** اگر Q_1 و Q_3 به ترتیب چارک‌های اول و سوم مجموعه‌یی از دیتا (Data) باشند، انحراف چارک‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q = Q_3 - Q_1$$

از تعریف بالا واضح است که 50% جامعه در فاصله $Q_3 - Q_1$ قرار دارند. هر قدر این فاصله کوچکتر باشد. دیتا (Data) متراکم‌تر و پراکنده‌گی آن‌ها کم‌تر است.

• **واریانس:** شاخص‌های پراکنده‌گی، اندازه‌هایی هستند که وضع پراکنده‌گی دیتا (Data) را نسبت به یک‌دیگر و نسبت به اوسط مشخص می‌کنند.

واریانس یکی از مهمترین شاخص‌های پراکنده‌گی است که با S^2 نشان داده می‌شود و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

و محاسبهٔ واریانس از جدول کثرت، توسط فرمول زیر به دست می‌آید:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$ (x_i مرکز دسته‌ها)

• **انحراف معیاری:** جذر مربع واریانس را با S نشان می‌دهند و آن را انحراف معیاری می‌گویند.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

محاسبهٔ انحراف معیاری از جدول کثرت توسط فرمول زیر به دست می‌آید:

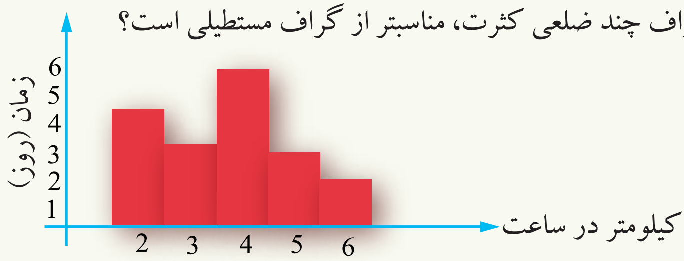
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$ (x_i مرکز دسته‌ها)

تمرین فصل

1- گراف زیر، نشان دهندهٔ توزیع سرعت باد در 19 روز است. با استفاده از اطلاعات داده شده در گراف، گراف چند ضلعی کثرت را برای سرعت باد رسم کنید.

اگر حداقل سرعت باد برای راندن یک قایق بادی 5 کیلومتر فی ساعت لازم باشد، چند روز برای راندن قایق بادی مناسب است؟

چرا در این مسأله، گراف چند ضلعی کثرت، مناسبتر از گراف مستطیلی است؟



2- گراف چند ضلعی کثرت گرافی است که. . . روی محور افقی و . . . روی محور عمودی نشان داده می‌شود.

الف) مرکز دسته‌ها- کثرت نسبی　　　ب) کثرت نسبی- مرکز دسته‌ها

ج) حدود دسته‌ها- کثرت مطلق　　　د) مرکز دسته - کثرت مطلق

3- گراف ساقه و برگ داده شده است:

- دیتای موجود در این گراف را بنویسید.

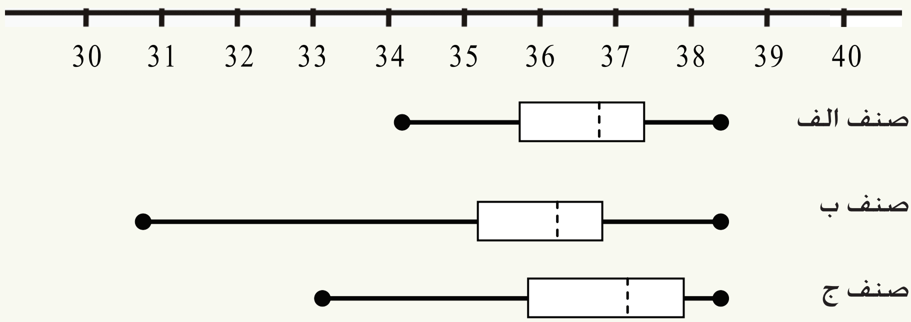
ساقه	برگ
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

4- از دوران کدام گراف به اندازهٔ 90° (خلاف حرکت عقربه ساعت) گراف میله‌یی حاصل می‌شود.

الف) ساقه و برگ　　　ب) مستطیلی　　　ج) چند ضلعی کثرت　　　د) دایروی

5- گراف زیر، نمرات امتحان صنفی سه صنف: الف، ب و ج را در امتحان ریاضی نشان می‌دهد.

باتوجه به گراف داده شده سؤال‌های زیر را پاسخ دهید:



• کدام صنف بیش‌ترین ساحهٔ تحول را دارد؟

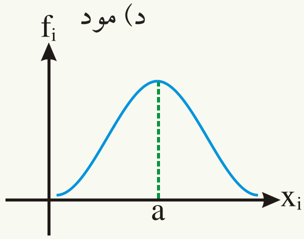
• میانهٔ نمرات کدام صنف از همه بیش‌تر است؟ میانهٔ نمرات کدام صنف از همه کم‌تر است؟

• پراکنده‌گی نمرات کدام صنف بیش‌تر از همه است؟

• این سه صنف را با توجه به نمراتی که در امتحان اخذ نموده‌اند از ضعیف‌ترین به قوی‌ترین مرتب کنید.

6- در گراف زیر، مقدار a کدام یک از مفاهیم زیرا را وانمود می‌سازد:

الف) میانه　　ب) اوسط　　ج) چارک سوم　　د) مود



7 - دو کارخانهٔ تولید کنندهٔ مواد غذایی A و B بسکیت را در بسته‌بندی 48 گرامی به فروش می‌رسانند.

پنج بسته بسکیت به صورت تصادفی از یک فروشگاه مواد غذایی از دو محصول انتخاب شود و تمام وزن بسته‌ها به دقت اندازه‌گیری شوند. نتیجه زیر به دست آمد:

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• کدام کارخانهٔ بسکیت، بیش‌ترین بسته‌ها را می‌فروشد؟ برای به دست آوردن حل سؤال از چه شاخصی استفاده می‌کنید؟

• کدام کارخانه‌ها در توزیع بسکیت یک‌سان عمل کرده‌اند؟

8 - اگر ساحهٔ تحول، برابر به صفر باشد، در بارهٔ دیتا (Data) چه نتیجه‌یی می‌گیرید؟

9 - تعداد ساعاتی را که شاگردان در طول یک هفته به ورزش اختصاص داده‌اند در زیر داده شده است:

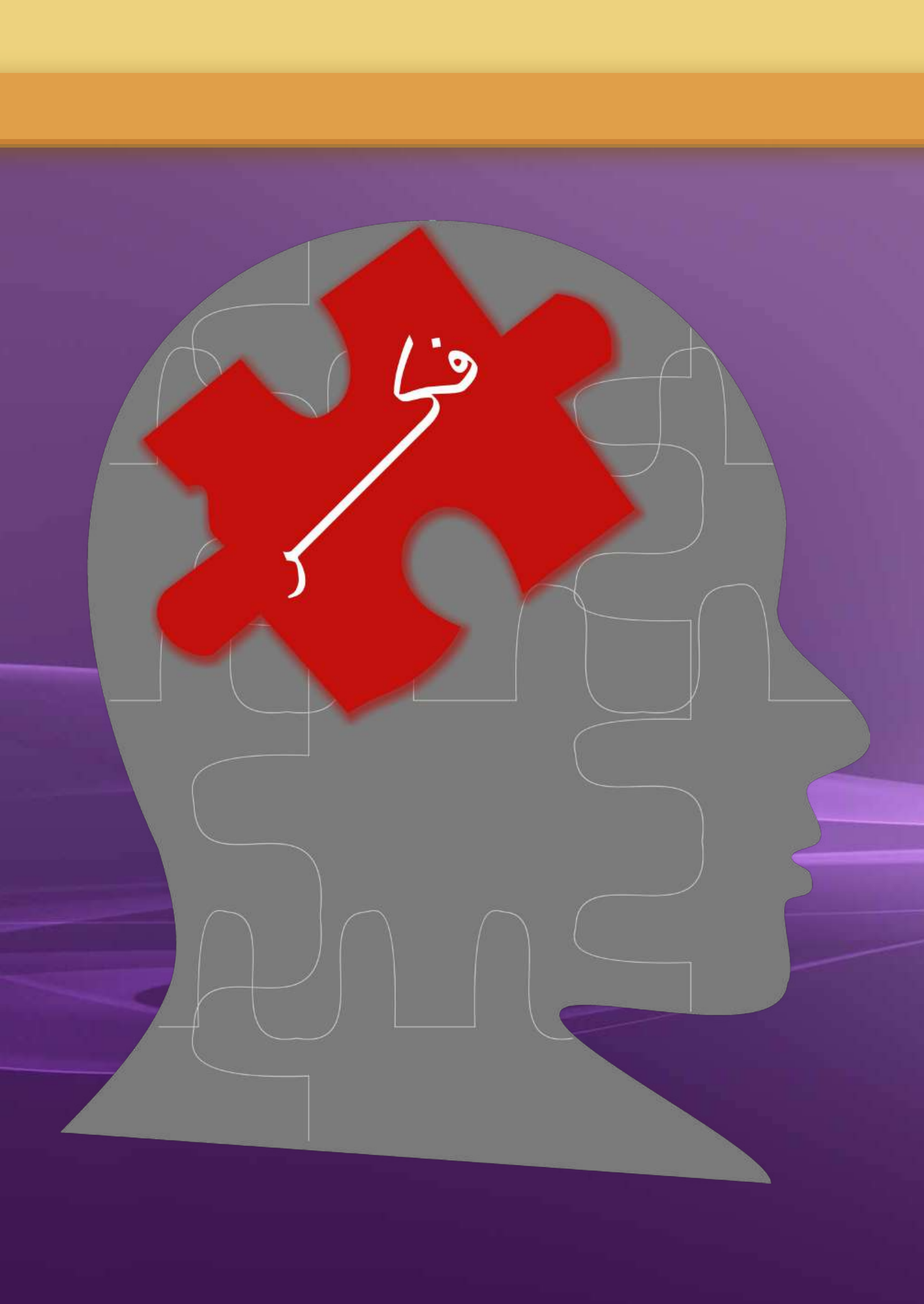
1 5 7 9

واریانس این دیتا (Data) را حساب کنید.

10- در جدول زیر واریانس را محاسبه کنید.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

فصل نهم
منطق ریاضی


فكر



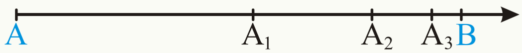
استدلال درک شهودی:

مردم در قرن‌های متمادی به این باور بودند که زمین هموار و ستاره‌ها به دور آن می‌چرخند.
آیا از کره‌ای بودن زمین درکی دارید؟
آیا خورشید به دور زمین و یا زمین به دور خورشید می‌چرخد؟

تعریف: فهم غریزه‌ای یا احساسی که به وسیلهٔ آن صحت و یا حقیقت یک موضوع و یا یک مفهوم را بدون استدلال قبول می‌کنیم عبارت از درک شهودی بوده که در مواقع مختلف زمان، می‌تواند از هم متفاوت باشد.

فعالیت

روی خط مستقیم دو نقطهٔ A و B را قرار شکل زیر در نظر بگیرید:



یک نفر می‌خواهد از نقطهٔ A به نقطهٔ B روی خط داده شده برود حتمی‌است که در نقطهٔ A_1 (نقطه وسطی قطعه خط AB) توقف نماید و برای رسیدن به نقطهٔ B بار دیگر در نقطه A_2 (نقطه وسطی قطعه خط A_1B) توقف نماید، و به همین ترتیب ادامه بدهد، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

– آیا به گونهٔ فوق توقف در نقطهٔ وسطی، بین دو نقطه روی خطی که در شکل بالا نشان داده شده است پایان دارد؟

– اگر این مسأله تا اخیر رعایت گردد شخص مورد نظر به نقطهٔ B خواهد رسید؟

– اگر نفر مذکور توقف ننماید و یا هم از راه بازنگردد، نه تنها به نقطهٔ B خواهد رسید؛ بلکه از آن عبور خواهد کرد؛ بنابراین بین واقعیت این مسأله و درک شهودی‌تان چه اختلافی

وجود دارد؟

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: نتیجه‌گیری، حاصل از درک شهودی، نمی‌تواند همواره نتیجه‌گیری صحیح را به دنبال داشته باشد؛ اما می‌تواند پایه‌گذار احکام و قضایای درست باشد.

از مثالی که در فعالیت بالا از آن استفاده نمودیم و یا مثال‌های هم مانند آن به معنای این نیست که استدلال درک شهودی گمراه کننده بوده؛ بلکه برعکس در بسیاری حالت‌ها استدلال درک شهودی باعث تلاش و پیگیری حل مسأله و ایجاد انگیزه‌یی می‌باشد که باعث طرح پرسش‌های جدیدتری می گردد.

مثال 1: با استدلال درک شهودی به سهولت می‌توان حکم کرد که دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند، بپذیریم.

چون در پذیرش این مسأله، استدلالی به کار نرفته و در واقع یک احساس است که بر اساس آن این حکم صورت می‌پذیرد. این گونه نتیجه‌گیری را به نام درک شهودی یاد می‌نماییم.

مثال 2: یک نقطه در خارج دایره‌یی به قطر 4 واحد قرار دارد، برای مطالعهٔ فاصلهٔ آن از مرکز دایره که بیشتر از 2 واحد است نمی‌توان گفت که استدلال مذکور یک درک شهودی است؛ زیرا برای وضاحت مسأله لازم است تا استدلال نماییم چون فاصلهٔ مرکز دایره از محیط آن 2 واحد بوده و نقطه در خارج محیط قرار دارد؛ بنابراین فاصلهٔ نقطه از مرکز دایره بزرگتر از 2 واحد می‌باشد؛ یعنی با در نظرداشت یک دانش و یا احساس غریزه‌وی بدون استدلال نمی‌توانیم مسأله را درک و صحت آن را قبول نماییم.

تمرین

1- کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه عبارت از خط مستقیم است، آیا درک این مسأله یک درک شهودی است؟ چگونه استدلال می کنید؟

2- کدام یک از احکام زیر با روش استدلال شهودی قابل درک است؟

a- زوایای مقابل یک متوازی الاضلاع مساوی‌اند.

b- در لوزی، اقطار عمود و ناصف یکدیگر هستند.

c- در یک مثلث قایم‌الزاویه وتر از هر یک دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

استدلال تمثیلی یا قیاسی



بگو در بین دستان من چیست؟ تقریباً گرد است، رنگش سفید است در بین سفیدی چیزی زرد است.

یک استاد منطق می‌خواست استدلال قیاسی شاگردش را امتحان نماید، رو به طرف او نمود و گفت:

میدانی قیاس و یا تمثیل، پلی برای رسیدن به حقیقت است و در جریان درس آموختیم که استدلال تمثیلی ما را به حقیقت نزدیک می‌کند؛ اما همیشه خود یک حقیقت ناب نیست.

استاد در حالی که در مشت‌های گره‌خوردهٔ خود تخم مرغی را پنهان نموده بود از شاگرد خود پرسید:

– بگو در بین دستان من چیست؟ تقریباً گرد است، رنگش سفید است در بین سفیدی چیزی زرد است.

شاگرد که تازه از یک مزرعهٔ زراعتی برگشته بود بعد از فکر عمیق رو به طرف معلم نموده گفت:

– استاد فکر می‌کنم در بین شلغم پوست‌شده، زردک قرار دارد.

تعریف

یافتن شباهت بین دو پدیده و نتیجه‌گیری یک‌سان در بارهٔ آن‌ها را استدلال تمثیلی یا قیاسی می‌نامند.

فعالیت

یک معلم، یک شاگرد بازی‌گوش را که درس را اخلال می‌نمود از صنف خارج کرد. در بیرون صنف ناگهان شاگرد مذکور یک هم‌صنفی خود را دید که او نیز از صنف بیرون آمده است. با در نظرداشت تعریف فوق کدام یک از ارتباطات زیر یک استدلال تمثیلی یا قیاسی است؟

– شاگرد دومی هنگام درس هوا خوری می کرد.
– او نیز بازی گوشی کرده است.
– مریض است، نمی‌خواهد در صنف بماند.

از تعریف و فعالیت شاگردان نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: قیاس و یا تمثیل در حقیقت نوعی یافتن تشابه بین مفاهیم گوناگون است، بنابراین تمثیل‌ها می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم یا قضایای ریاضی به کار روند.

استدلال تمثیلی به حیث یک ثبوت حساب نمی‌شود؛ اما زمینه ساز آن است.

مثال 1 : مثل عامیانهٔ «مارگزیده از ریسمان ابلق می‌ترسد» یک استدلال قیاسی است؛ زیرا ریسمان ابلق با مار مقایسه شده است و بین آن‌ها شباهتی دیده شده است.

مثال 2: از تمثیل و یا قیاس برای درک این حقیقت که حاصل‌ضرب منفی ضرب منفی یک عدد مثبت و حاصل‌ضرب منفی ضرب مثبت، یک عدد منفی است استفاده می کنیم:

هرگاه لایق بودن یک شاگرد را مثبت (+) و نالایق بودن او را منفی (−) در نظر بگیریم و حاصل آن دو عمل، یعنی برای است (+) و برای نیست (−) را در نظر گرفته، آن‌ها را ترکیب نماییم در نتیجه داریم:

لایق است = مثبت ، لایق نیست = منفی
(+) (+) = + ، (+) (−) = −
نالایق است = منفی ، نالایق نیست = مثبت
(−) (+) = − ، (−) (−) = +

تمرین

1 – بیان: «سالی که نیکو است از بهارش پیداست» چگونه به یک استدلال زیر دلالت می کند:

a– استدلال درک شهودی
b– استدلال قیاسی
c– هیچ‌گونه استدلال در آن وجود ندارد

2– توسط استدلال قیاسی در کدام یک از مثلث‌ها با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نتیجهٔ زیر اثبات شده می‌تواند:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

استدلال استقرایی



یک شاگرد در اولین امتحان صنفی 100 نمره می گیرد. شاگرد مذکور در امتحان دوم و سوم نیز موفق به گرفتن 100 نمره می‌شود.
در امتحان نهایی چه نتیجه گیری می کنید؟ شاگرد مذکور به گرفتن چند نمره موفق خواهد شد؟

فعالیت

حاصل جمع اعداد تاق متوالی طبیعی را در نظر می گیریم. برای این کار از عدد 1 آغاز نموده خانه‌های خالی را پر نمایید:

$1+3= \square = (\quad)^2$

$1+3+5= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \square = (\quad)^2$

با توجه با مسائل فوق می‌بینیم که تمام حاصل جمع‌ها مساوی به مربع کامل تعداد اعداد طبیعی است.

– آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که همیشه حاصل جمع اعداد تاق متوالی مساوی به مربع تعداد اعداد طبیعی متوالی می‌باشد؟

– سعی نمایید فورمول حاصل جمع n عدد تاق متوالی را به دست آورید.

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید.

نتیجه: استدلال استقرایی عبارت از روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است. در واقع تعمیم دادن خاصیتی در مورد یک نمونهٔ کوچک به نمونهٔ بزرگ است.

مثال 1: "مشت نمونهٔ خروار است" به استدلال استقرایی اشاره می‌کند؛ زیرا در این مثال از یک نمونهٔ کوچک، نتیجه‌گیری مشخصی در مورد کل مجموعه گرفته می‌شود. در واقع بر پایهٔ تعداد محدودی از مشاهدات از مسأله نتیجه‌گیری شده است؛ بنابراین استدلال استقرایی به کار گرفته شده است.

مثال 2: یک شاگرد به طور اتفاقی در چندین مرحله، سه عدد متوالی را با هم ضرب نموده ملاحظه می‌کند که نتیجهٔ حاصله مضرب 6 است. از انجام این عمل نتیجه‌گیری می‌کند که:

" حاصل‌ضرب هر سه عدد متوالی، مضرب 6 است"

شاگرد مذکور چه استدلالی به کار برده است؟

الف: شهودی ب: قیاسی ج: استقرایی د: هیچ‌کدام

حل: استدلال استقرایی

تمرین

1- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدود از مشاهدات چگونه یک استدلال است؟

الف) استدلال قیاسی یا تمثیلی

ب) استدلال استقرایی

ج) استدلال درك شهودی

2- با دقت به ترتیب اعداد، خانه‌های خالی زیر را تکمیل نمایید:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

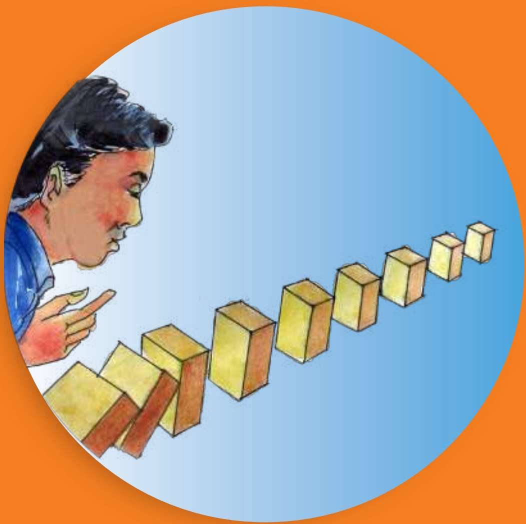
a) حل سؤال شماره 2 را در نظر گرفته آیا گفته می‌توانید که ترتیب فوق می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد؟

b) بدون محاسبه با توجه به تمرینات بالا اعدادی را که در تساوی‌های زیر صدق می‌کند حدس بزنید:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

استقرای ریاضی
بازی دو مینو



آیا کدام وقت بازی دومینو را انجام داده اید؟

می‌دانید که در بازی دومینو با افتادن خشت اولی روی خشت دومی که کنار هم قرار دارند به ترتیب افتادن خشت دومی بالای سومی، سومی... تا آخر یکی پی دیگری به زمین می‌افتند، این افتادن‌های خشت‌ها یکی پی دیگری که قرار شکل بالا به فاصله‌های مناسب و مساوی از هم قرار گرفته‌اند برای علاقه‌مندان تصویر جالبی به نمایش می گذارد.

ملاحظه می‌نماییم که با افتادن خشتی که در موقعیت k ام قرار دارد باعث چپه شدن یا افتادن خشت بعدی $(k+1)$–ام می گردد.

حال اگر عمل افتادن خشت‌ها از شمارهٔ مشخص آغاز شود، از آن به بعد خشت‌ها یکی پی دیگری، یعنی همهٔ دومینوها بالای هم می‌افتند و به این ترتیب همه دومینوها روی زمین قرار می گیرند.

فعالیت

می‌دانیم که $100=1+8+27+64$ بوده که اگر آن‌ها را به شکل مربع‌ها و یا مکعب‌ها در آوریم می‌توانیم به شکل زیر نیز بنویسیم:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

– آیا همیشه مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی مساوی به مجموع مربع تعداد آن‌ها است؟

– آیا می‌توانید حالت عمومی‌تری را برای مسألهٔ فوق ارائه نمایید؟ به خاطر دریافت جواب به سؤال فوق جدول را تکمیل کنید:

تعداد اعداد متوالی	مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی	مجموع مکعب‌ها	مربع مجموع اعداد
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

– صحت فورمول $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ را برای مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی در برابر اعداد $n=1$, $n=2$, $n=3$ □ $n=4$ امتحان کنید.

– حال اگر مجموع مکعب‌های n عدد طبیعی متوالی را نظر به فورمول فوق قبول کنیم؛ یعنی اگر:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

باشد، ادعا را برای $n+1$ عدد متوالی ثبوت کنید؛ یعنی نشان دهید که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: هرگاه $P(n)$ حکمی دربارهٔ اعداد طبیعی n داده شده باشد با مطالعهٔ حکم در برابر $n=1$ یعنی اگر $P(1)$ درست باشد و در قدم دوم ما از درستی $P(k)$، درستی $P(k+1)$ را به حیث نتیجه درست به دست آوریم، در این صورت، ادعای $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست می‌باشد.

مثال 1: نشان دهید که $P(n)=4^{2n}-1$ برای هر عدد طبیعی n قابل تقسیم بر 5 است؟

حل: ادعا برای $n=1$ درست است؛ زیرا:

$n=1$, $P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$

دیده می‌شود که $P(1)=15$ قابل تقسیم بر 5 است.

برای عدد طبیعی k قبول می‌کنیم که ادعای فوق صدق می‌کند، یعنی: $P(k)=4^{2k}-1$ قابل تقسیم به 5 است، بنابراین چون قابل تقسیم به 5 است؛ می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$P(k)=4^{2k}-1=5r\text{......................}(*)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که بر $n=k+1$ نیز ادعای مذکور درست است؛ بنابراین داریم:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1\text{...........}(**)$$

اطراف رابطهٔ (*) را ضرب 4^2 نموده داریم:

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

طرف راست رابطهٔ فوق $5\cdot(3+16r)$ نشان می‌دهد که طرف چپ مساوات قابل تقسیم به 5 است.

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ نیز به 5 قابل تقسیم است. چون از صحت $p(k)$ ما صحت $P(k+1)$ را نتیجه گرفتیم، بنابراین نظر به اصل استقرای ریاضی ادعای $P(n)$ در برابر هر عدد طبیعی n نیز درست می‌باشد.

یادداشت: در اثبات احکام ریاضی به کمک استقرای ریاضی ابتدا $P(1)$ را به دست می‌آوریم؛ سپس $P(k)$ را به عنوان حکم استقرایی در نظر گرفته و به این ترتیب از فرضیه، حکم را ثابت می‌نماییم.

مثال2: با استفاده از استقرای ریاضی ثبوت کنید که رابطهٔ زیر برای هر عدد طبیعی n درست است:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: برای صحت رابطهٔ فوق در برابر $n=1$ داریم:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

بنابراین، رابطه در برابر $n=1$ صحیح بوده، حال اگر برای $n=k$ صحت آن را قبول نماییم. مسأله را برای $n=k+1$ به اثبات می‌رسانیم؛ بنابراین داریم:

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

فرضیهٔ استقرا

با فرض رابطهٔ بالا برای $P(n)$ با درنظرداشت $n=k+1$ می‌خواهیم صحت رابطه را نشان دهیم؛ بنابراین داریم:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

حکم استقرا

با در نظرداشت فرضیهٔ استقرا داریم:

$$P(k+1)=[1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times 2+2\times 3+\ldots+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

بنابراین، رابطه برای $n=k+1$ نیز درست بوده و بدین ترتیب رابطهٔ $P(n)$ در برابر هر n از اعداد طبیعی صحت می‌باشد.

تمرین

1 – توسط استقرای ریاضی نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – توسط استقرای ریاضی نشان دهید که:

(i) $2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

استدلال استنتاجی



آیا می‌توانیم بدون روشنی در تاریکی شب اشیا را مشاهده و از هم تفکیک نماییم؟

فعالیت

سه ست مختلف اعداد طبیعی را که هر کدام آن دارای سه عدد اختیاری طبیعی متوالی باشد بنویسید.

– حاصل‌ضرب عناصر هر ست را جداگانه به دست آورید.

– آیا می‌توانیم بگوییم که حاصل‌ضرب‌های مذکور:

(I): قابل تقسیم برعدد 2 اند؟ چرا؟

(II): قابل تقسیم بر عدد 3 اند؟ چرا؟

– آیا گفته می‌توانیم که حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی، همیشه بر عدد 6 قابل تقسیم اند؟ چرا؟

– قابلیت تقسیم بر 6 حاصل‌ضرب سه عدد متوالی را چرا به این صورت پذیرفتیم.

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: با استفاده از حقایقی که درستی آن را در قدم نخست پذیرفتیم، نتیجهٔ عمومی‌تری را به دست آورده که به نام استدلال استنتاجی یا روش نتیجه‌گیری یاد می‌گردد. به عبارت دیگر، استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را ثبوت و یا پذیرفته باشیم.

وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمین هستیم که نتیجه، همیشه درست است.

مثال: با سرگرمی تمام به قدم‌های جدول زیر دقت نموده که چگونه ما بازی با اعدادی که درستی و حقیقت هر مرحله را می‌پذیریم به مرحلهٔ دیگری قدم گذاشته و نتیجه را به دست می‌آوریم.

قابل تذکر می‌دانیم در جدول، عدد به صورت اختیاری انتخاب گردیده و شما می‌توانید به عوض آن هر عدد اختیاری دیگری را که دل‌تان می‌خواهد انتخاب نمایید. ملاحظه کنید که نتیجه برای همه اعداد یکسان است.

یک عدد را به صورت اختیاری انتخاب کنید.	4	7	12
به عدد مذکور عدد 5 را اضافه کنید.	9	12	17
نتیجه را دو چند نمایید.	18	24	34
از نتیجهٔ حاصله عدد 4 را کم نمایید.	14	20	30
عدد را به 2 تقسیم نمایید.	7	10	15
عددی را که در اول انتخاب کرده بودید از عدد کم کنید.	3	3	3

نکتهٔ اساسی که به نظر می‌خورد این است که ما در حقیقت بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم، نتیجهٔ بعدی را به دست آوردیم.

این مسأله ما را مطمین می‌سازد که با انتخاب هر عدد اختیاری نتیجه همیشه یکسان و مساوی به 3 می‌باشد.

تمرین

1 – نشان دهید که حاصل جمع دو عدد تاق همیشه جفت است.

2 – ثابت کنید که هر عدد صحیح تاق به صورت $2k+1$ است.

3 – در بین 9 عدد سکهٔ طلایی یکی آن تقلبی است که وزن آن از سکه‌های دیگر کمتر است. چگونه می‌توان با دوبار وزن کردن توسط یک ترازوی دو پله‌یی بدون استفاده از اوزان دیگر سکهٔ تقلبی را دریافت نماییم؟

استدلال مثال نقض



مشت نمونهٔ خروار است.

اگر نمونهٔ کوچک یک جنس بی‌کیفیت باشد، آیا می‌توان ادعا کرد که کتلهٔ بزرگ آن دارای کیفیت عالی است؟

فعالیت

بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل‌جمع اعداد متوالی بنویسیم:

طور مثال: $9 = 2+3+4$

– خانه‌های خالی را با در نظرداشت مثال فوق تکمیل کنید:

$$15 = \square + 2 + \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

– آیا می‌توانیم هر عدد طبیعی را به شکل حاصل‌جمع اعداد متوالی ارائه نماییم؟

– اگر جواب‌تان منفی باشد مثال بدهید.

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

نتیجه: هر گاه با مثالی نشان دهیم که نتیجه گیری کلی نادرست و یا غلط است، نادرستی ادعا را نشان داد که به نام مثال نقض یاد می‌گردد.

مثال: برای اثبات مسأله کافی است نشان دهیم که اعداد x و y وجود دارد که غیر ناطق بوده؛ اما مجموع آن‌ها $x+y$ ناطق است.

برای این منظور هرگاه دو عدد $x=1+\sqrt{2}$ و $y=1-\sqrt{2}$ را انتخاب نماییم داریم:

$$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=1+1=2$$

دیده می‌شود که حاصل‌جمع آن‌ها مساوی به عدد 2 یک عدد ناطق بوده؛ در حالی که x و y اعداد غیرناطق می‌باشند؛ بنابراین ادعا کرده نمی‌توانیم که مجموع دو عدد غیرناطق همیشه یک عدد غیرناطق می‌باشد.

تمرین

1- با استفاده از مثال نقض نشان دهید که "مربع هر عدد حقیقی از مکعب آن کوچکتر است".

2- برای کدام بیان زیر مثال نقض وجود ندارد:

a) مجموع دو عدد ناطق، عدد ناطق است.

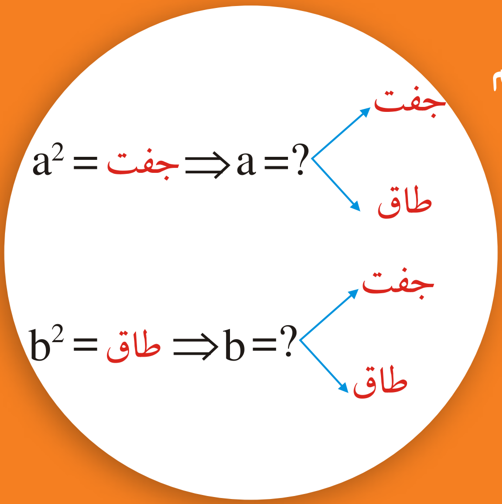
b) مربع هر عدد مثبت، بزرگتر از خود عدد است.

c) دو زاویه که اضلاع متناظرشان موازی است، با هم برابر اند.

d) مجموع دو عدد تاق، عدد جفت است.

e) حاصل‌ضرب دو عدد غیرناطق، عدد غیرناطق نیست.

برهان خلف یا ثبوت غیرمستقیم



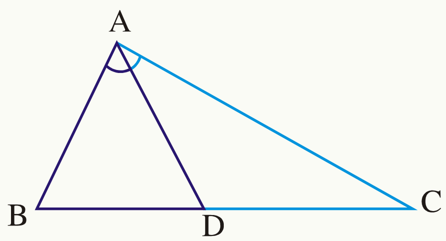
اگر مربع یک عدد جفت باشد، آیا خود عدد جفت است یا تاق؟

آیا می‌توانیم به صورت عموم ادعا نماییم که اگر مربع یک عدد جفت باشد خود عدد نیز یک عدد جفت است؟

اگر نشان دهیم که خود عدد تاق نیست، چه نتیجه می گیرید؟

فعالیت

مثلث ABC را قرار شکل زیر در نظر بگیرید:



- ناصف زاویه $\hat{A}$ را ترسیم کنید.
- اگر $BD \neq CD$ باشد، اضلاع AB و AC با هم چه رابطه دارند؟
- هرگاه فرض نماییم که $BD \neq CD$ بود؛ اما $AB = AC$ است، این مسالهٔ ما را به کدام نتیجه می‌رساند؟

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

نتیجه: هرگاه با فرضیه یا قبولی عکس ادعای یک قضیه یا مسأله، به نتیجهٔ خلاف فرضیه برسیم، در این صورت، فرض ما درست بوده که خلاف آن درست است، این گونه استدلال را به نام برهان خلف و یا ثبوت غیرمستقیم می‌نامند.

یادداشت: به خاطر بسپارید که برای استفاده از برهان خلف یا ثبوت غیرمستقیم گام‌های زیر را در نظر می گیریم:

قدم اول: فرض می کنیم ادعای مطلوب درست نباشد.

قدم دوم: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌یی به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می کند.

قدم سوم: حال که نتیجه به یک تناقض رسیده است، معلوم می‌شود که فرضیه قدم اول نادرست بوده، بنابراین مطلب باید درست باشد.

مثال: نشان دهید که اگر n^2 یک عدد جفت طبیعی باشد عدد n نیز جفت است؟

حل: به خاطر ثبوت مسأله فرض می‌نماییم که با وجود جفت بودن n^2 عدد n یک عدد تاق است؛ پس می‌توان آن را به شکل $n = 2k+1$ بنویسیم؛ در حالی که k یک عدد تام است، در نتیجه برای مربع عدد مذکور داریم:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که n^2 یک عدد تاق است. درحالی که خلاف فرضیه بوده و در نتیجه فرضیه گرفته شده در بالا برای این‌که n یک عدد تاق است نادرست بوده و به این نتیجه می‌رسیم که n نیز یک عدد جفت می‌باشد؛ زیرا فرض تاق بودن آن، ما را به این نتیجه می‌رساند که n^2 نیز باید تاق باشد.

تمرین

نشان دهید که $\sqrt{3}$ یک عدد غیرناطق است.



منطق ریاضی و استنتاج
بیـــان

شنیدن خبری از هم‌صنفی پهلوی‌تان چه نتیجه خواهد داشت؟
آیا خبر درست است و یا نادرست؟

تعریف

یک جملهٔ خبری به نام بیان یاد می گردد، هرگاه نتیجهٔ آن درست و یا نا درست بینجامد.

فعالیت

جمله‌های زیر را در نظر گرفته مشخص نمایید که کدام‌یک آن‌ها یک بیان و کدام‌یک آن‌ها نمی‌تواند یک بیان باشد. نتیجهٔ منطقی آن‌ها چیست؟

i) امروز باران نمی‌بارد.

ii) آیا امروز باران نمی‌بارد؟

iii) باران ببار.

iv) چه باران شدید می‌بارد!

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

نتیجه:

1 – هر جمله نمی‌تواند یک بیان باشد. یک جمله می تواند پرسشی، امری، تعجبی و یا خبری باشد.

2 – هر جملهٔ خبری درست یا نادرست است.

یادداشت: اگر یک بیان را P بنامیم؛ در این صورت، طرز نوشتهٔ $P \equiv T$ برای بیان درست و $P \equiv F$ برای بیان نادرست استعمال می گردد.

برعلاوه $\sim P$ نفی بیان P می‌باشد.
جدولی که در آن ارزیابی یک بیان صورت گرفته باشد، به نام جدول صحت یاد می‌شود.
بنابراین برای هر بیان P داریم:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: جدول صحت را برای بیان، «مسکا شاگرد صنف دهم است $= P$» ترتیب نمایید.
حل: به خاطر ارزیابی بیان فوق می‌دانیم که بیان مذکور درست و یا نادرست است.
اگر بیان درست باشد در این صورت می‌توانیم بنویسیم: $P \equiv T$ و $\sim P \equiv F$ می‌باشد.
بنابراین، حالت نفی بیان P عبارت از« P نادرست است» بوده، یعنی: $\sim P \equiv F$ می‌باشد. این بیان به معنای این است که بیان مسکا شاگرد صنف دهم نیست، یعنی P نادرست است.
اگر $P \equiv F$ باشد در این صورت $\sim P = T$ بوده و بدین‌ترتیب جواب فوق را می‌توانیم در جدول صحت زیر مشاهده نماییم:

P	$\sim P$
T	F
F	T

ترکیب بیان‌ها

اگر دو بیان p و q داده شده باشند، در این صورت:
1 - ترکیب $p \wedge q$ به نام ترکیب عطفی و یا ((و) منطقی) بیانات p و q یاد می‌گردد.
علامت "$\wedge$" به معنای "و" به کار گرفته شده است.
2 - ترکیب $p \vee q$ به نام ترکیب فصلی یا (یای منطقی) بیانات p و q یاد می‌گردد، علامت "$\vee$" به معنای «یا» به کار برده شده است.
3 - ترکیب $p \Rightarrow q$ به نام ترکیب مشروط و یا " اگر p پس q خوانده شده" یاد گردیده و علامت $\Rightarrow$ نشان می‌دهد که P اساس ترکیب شرطی می‌باشد که q از p آن نتیجه می‌شود.
4 - ترکیب $p \Leftrightarrow q$ به نام ترکیب‌مشروط دوطرفه و یا " p اگر و تنها اگر و q خوانده شده" یاد می‌گردد. و علامت " $\Leftrightarrow$ " نشان می‌دهد که اگر p اساس ترکیب شرطی باشد q از آن

نتیجه گردیده واگر q اساس ترکیب شرطی باشد p از آن نتیجه می گردد.

به این ترتیب ترکیب «اگر و تنها اگر» بیان‌های p و q را در جدول صحت زیر ملاحظه می‌نماییم:

p	q	$p\wedge q$	pvq	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

مثال1: هرگاه بیان $P\equiv(2+4=6)$ و $q\equiv$ (مربع عددی که منفی باشد) داده شده باشد، نتیجهٔ بیان‌های q، p، $\sim p$، $\sim q$، $p\vee q$، $p\wedge q$، $\sim(p\wedge q)$ و $\sim(p\vee q)$ را دریافت کنید.

حل: با دقت به بیان‌های فوق ارزش بیان‌های فوق عبارت اند از:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

مثال2: با تشکیل جدول صحت نشان دهید که $P\vee(p\Rightarrow q)$ همیشه درست است:

حل

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

از جدول صحت در ستون آخری مشاهده می‌نماییم که بیان $p\vee(p\Rightarrow q)$ همیشه درست است.

تمرین

1 – با تشکیل جدول صحت نشان دهید که بیان $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ همیشه نادرست است. (توجه کنید که p و ~p مستقل از هم نیستند).

2 – باتشکیل جدول صحت نشان دهید که ارزش بیان‌های $(p \Rightarrow q)$ و $\sim (p \vee q)$ با هم مساوی اند یا خیر؛ یعنی:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

خلاصهٔ فصل

استدلال ریاضی: شیوه یا روشی که به وسیلهٔ آن وضاحت یا صحت یک بیان ریاضی حاصل می‌شود به نام استدلال ریاضی یاد می گردد.

درک شهودی: فهم غریزه‌وی یا احساسی که به وسیلهٔ آن صحت یا حقیقت یک موضوع و یا یک مفهوم ریاضی را بدون استدلال قبول می‌نماییم عبارت از درک شهودی بوده و در مواقع مختلف زمان از هم متفاوت است.

استدلال تمثیلی یا قیاسی: یافتن شباهت بین دو پدیده و نتیجه‌گیری یک‌سان در بارهٔ آن‌ها را به نام استدلال تمثیلی یا قیاسی یاد می‌نمایند.

استدلال استقرایی: روشی که از آن نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدود از مشاهدات، یعنی از جزء به کل به‌دست می‌آید به نام استدلال استقرایی یاد می گردد.

استدلال استقرایی ریاضی: هر گاه $P(n)$ حکمی دربارهٔ اعداد طبیعی n داده شده باشد با مطالعهٔ حکم در برابر $n=1$ یعنی اگر $P(1)$ درست باشد و در قدم دوم از درستی $P(n+1)$ درستی بیان $P(n)$ نتیجه گردد. در این صورت بیان $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n درست بوده و به نام استدلال استقرایی ریاضی یاد می گردد.

استدلال استنتاجی: با استفاده از آن‌عده حقایقی که درستی آن در آغاز پذیرفته شده باشد، نتیجهٔ عمومی‌تری به دست آورده شود به نام استدلال استنتاجی یا روش نتیجه گیری یاد می گردد. به عبارت دیگر ، نتیجه‌گیری از حقایق پذیرفته شده و آشکارا که درستی آن را ثبوت و یا هم پذیرفته باشیم.

استدلال مثال نقض: هرگاه با مثالی نشان دهیم که نتیجه‌گیری کلی نادرست است. در این صورت به صورت کل نادرستی ادعا را نشان داده و به نام استدلال مثال نقض یا نفی یاد می گردد.

برهان خلف و یا ثبوت غیرمستقیم: هرگاه با فرضیه یا قبول یک قضیه‌یی به عکس بیان یا ادعای یک قضیه برسیم در این صورت، فرضیه نادرست بوده و خلاف آن صحت است. اینگونه استدلال را به نام برهان خلف یا ثبوت غیرمستقیم یاد می‌نماییم.

بیان: یک جملهٔ خبری که نتیجه آن درست و یا نادرست باشد به نام بیان یاد می گردد. جمله‌یی که نتیجهٔ آن درست و یا نادرست نیست بیان نیست.

ترکیب بیان‌ها: اگر دو بیان p و q داده شده باشند در این صورت:

1- توسط "و" علامت منطقی "$\wedge$" بیان $p \wedge q$ عبارت از ترکیب بیانات p و q بوده که به شکل بیان p و q خوانده می‌شود.

2- توسط "یا" و یا علامت منطقی "$\vee$" بیان $p \vee q$ عبارت از ترکیب بیانات p و q بوده که به شکل بیان p یا q خوانده می‌شود.

3- "اگر پس" ویا علامت منطقی "$\Rightarrow$" بیان $p \Rightarrow q$ یک بیان مشروط بیانات p و q بوده که به شکل "اگر p پس q خوانده می‌شود در این صورت علامت $\Rightarrow$ نشان می‌دهد که p یک اساس ترکیب شرطی برای آن که q از آن نتیجه شود می‌باشد.

4- "اگر و تنها اگر" و یا علامت منطقی "$\Leftrightarrow$" یک ترکیب مشروط بیان دوطرفه بیانات p و q بوده که بیان $p \Leftrightarrow q$ به صورت p اگر و تنها اگر q می باشد.

تمرین فصل

1 – کدام یک از جواب‌های زیر به نظر شما درست است؟

الف) یکی از مشکلات روش استقرایی عبارت از وجود خطاها در مشاهدات است.

ب) یکی از روش‌های قوی استدلال ریاضی روش استقرایی می‌باشد.

ج) محدود بودن تعداد مشاهدات یکی از اشکالات روش استقرای ریاضی است.

د) جواب الف وج درست اند.

2 – کدام‌یک از جواب‌های زیر نادرست است:

استدلال استقرایی

الف) یکی از روش‌های بسیار قوی مسائل ریاضی است

ب) ما را به احتمال وجود قانونمندی کلی در مسائل رهنمایی می کند.

ج) یکی از روش‌های حل مسایل غیر ریاضی است.

د) یکی از روش‌های حل مسایل ریاضی نیست.

3 – کدام‌یک از جواب‌ها زیر در مورد شهود درست است؟

الف) استفاده از شهود برای یک نتیجه‌گیری صددرصد درست است.

ب) با استفاده از شهود نمی‌توان با اطمینان گفت که نتیجه‌گیری صددرصد است.

ج) شهود برای درک بهتر ریاضیات است.

د) با استفاده از شهود حدس‌های قطعی همراه با استدلال حتمی برای ثبوت می‌توان زد.

4 – کدام یک از جواب‌های زیر نادرست است:

الف) استدلال استقرایی از جزء به کل رسیدن است.

ب) استدلال استقرایی از کل به جزء رسیدن است.

ج) از استدلال استقرایی نمی‌توان به عنوان اثبات دقیق ریاضی استفاده کرد.

د) استدلال استقرایی نتیجه‌گیری کلی برمبنای مجموعه‌ای از مشاهدات محدود است.

5 – بر اساس استدلال استنتاجی کدام یک از جواب‌های زیر نادرست است؟

الف) اگر برف ببارد زمین مرطوب می‌شود، زمین مرطوب است. بنابراین، برف باریده است.

ب) تمام فارغان یک مکتب، با کمپیوتر آشنا و ریاضی را خوب می‌دانند. ضمیر از مکتب

مذکور فارغ شده است. بنابراین، ضمیر با کمپیوتر خوب آشنا و خوب ریاضی می‌داند.

ج) اگر چهار ضلعی مربع باشد. هر دو قطر آن با هم عمود اند، دو قطر یک چهارضلعی بالای هم عمود اند. بنابراین، چهار ضلع مذکور مربع است.

د) مثلث متساوی الساقین دو ضلع با هم برابر دارد، هر مثلث با سه ضلع برابر متساوی‌الاضلاع است. بنابراین، هر مثلث متساوی‌الاضلاع متساوی، متساوی‌الساقین است.

6 – با استفاده از استدلال قیاسی نشان دهید که برای هر زاویهٔ حقیقی $\propto$ صورت می گیرد:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

7 – با استدلال استقرایی نشان دهید که حاصل‌جمع n عدد تاق متوالی مساوی n^2 است.

8 – با استدلال استقرای ریاضی نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n مساوات ذیل تحقق می‌یابد.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9 – با استدلال استنتاجی ثبوت نمایید که حاصل‌جمع دو عدد جفت همیشه جفت است.

10 – با یک مثال نشان دهید که افادهٔ $2^n + 3$ برای هر عدد طبیعی همیشه یک عدد اولیه نیست.

11 – با استدلال برهان‌خلف نشان دهید که اگر n یک عدد طبیعی ثابت و اختیاری و برعلاوه n^2 تاق باشد؛ پس n نیز تاق می‌باشد.

12 – جدول صحت را برای بیان مرکب «باران می‌بارد و ابر نیست، پس باران نمی‌بارد» تشکیل نمایید. در صورتی که بیان $\propto =$ « باران می‌بارد» $\beta =$ «ابر است. » نام‌گذاری شده باشد؟ عدد 1 را برای صحیح و o را برای غلط به کار ببرید.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				